

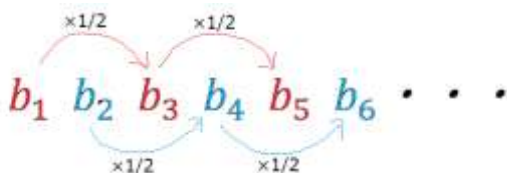
Q. (数学 2B 標準問題精講 p. 309 標問 138(2))

p. 310 の「与式は $a(n+2)-3=1/2(an-3)$ と変形される。」以降の $n=2m-1$ のときと $n=2m$ のときについて、解説の補助をお願いします。

A.

この問題で n を $2m-1$ と $2m$ に場合分けしているのは、奇数項と偶数項で異なる数列になっているからです。奇数項のみを抽出した数列、偶数項のみを抽出した数列で分けて考えます。

b_1 を初項として奇数番目の項を取り出した数列と、 b_2 を初項として偶数番目の項を取り出した数列の 2 つの数列が交互に出てくる数列だと考えてください。



つまり、 b_n が奇数番目の項であれば b_1 を初項として、公比 $\frac{1}{2}$ を (奇数項の数-1) 回だけかけた値になります。一方、 b_n が偶数番目の項であれば b_2 を初項として、公比 $\frac{1}{2}$ を (偶数項の数-1) 回だけかけた値になります。これが、 n が奇数と偶数のときを場合分けする理由になります。

(i) 奇数項 $n=2m-1$ のとき

この、 $n=2m-1$ の設定についてですが、 $m=1$ (奇数数列の 1 番目) が $n=1$ (全体の数列の 1 番目) になるように合わせると、奇数数列内での第 m 項が全体の数列での第 n 項 という関係になり分かりやすくなります。

※ $n=2m+1$ にしても奇数であることは表せますが、 $n=1$ (全体の 1 番目) のとき $m=0$ となり全体数列との対応がわかりにくくなります。

$$b_{2m-1} = b_1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{m-1} \quad \text{より、} \quad a_{2m-1} - 3 = (a_1 - 3) \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{m-1}$$

(ii) 偶数項 $n=2m$ のとき

同様にして

$$b_{2m} = b_2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{m-1} \quad \text{より、} \quad a_{2m} - 3 = (a_2 - 3) \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{m-1}$$

となります。

ここで注意したいのは、奇数数列の中の何項目 (m) というのと、偶数数列も合わせた全体の数列の中で何項目 (n) というのが異なるという点です。

たとえば、奇数数列の中で3番目 ($m=3$) のものは全体の数列では5番目 ($n=2m-1$ に $m=3$ を代入するので $n=5$) となります。

m と n の対応をはっきりさせましょう。 m が1増えることは、「奇数から次の奇数」あるいは「偶数から次の偶数」に進むことを意味するので、奇数と偶数が交互に出てくる n では2つ進んでいることとなります。 m と n は1対1対応ではないので注意してください。

そのため、 n の式を m を使って書き換えるときも単純に代入すればよいというわけではなく、公比 $1/2$ を何回かける必要があるかを考えて次数を決める必要があります。