Ｑ．（基礎問題精講３ 例題 45(2)）
「3－an＞０だから」の後の解説について、両辺に正の値を掛けたために不等号が変わらないところまでは分かるのですが、その後がわかりません。

Ａ．

$\frac{3-a_n}{2+\sqrt{1+a_n}} < \frac{1}{3}(3-a_n)$

解答(2)の１，２行目より、

$3-a_{n+1} = 2-\sqrt{1+a_n} = \frac{3-a_n}{2+\sqrt{1+a_n}}$ であるから、これを上の式に代入します。

よって、$3-a_{n+1} < \frac{1}{3}(3-a_n)$

ここで、よく見る二項間漸化式の形に近くなりました。
n≥2 のとき、

$3-a_{n+1} < \frac{1}{3}(3-a_n)$　を利用して、まず n の次数を一つ下げると

$3-a_n < \frac{1}{3}(\boldsymbol{3-a_{n-1}})$　・・・①

もう一つ下げると

$\boldsymbol{3-a_{n-1}} < \frac{1}{3}(3-a_{n-2})$ 両辺$\frac{1}{3}$倍して

$\frac{1}{3}(\boldsymbol{3-a_{n-1}}) < (\frac{1}{3})^2(3-a_{n-2})$・・・②

①、②式をつなげると

$3-a_n < \frac{1}{3}(\boldsymbol{3-a_{n-1}}) < \left(\frac{1}{3}\right)^2(3-a_{n-2})$

この周期性より、同じ作業を繰り返していくと

$3-a_n < \frac{1}{3}(\boldsymbol{3-a_{n-1}}) < \left(\frac{1}{3}\right)^2(3-a_{n-2}) < \cdots < \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}(3-a_1)$

一番右端の項の次数の決め方には注意してください。a_nの n が一つ減ると$\frac{1}{3}$の次数が一つ上がります。※等比数列の一般項の決め方と同じ考え方です。

よって、$3-a_n < \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}(3-a_1)$

n=1 のとき、左辺＝右辺になるので、不等号に等号も含めて

$3-a_n \leq \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}(3-a_1)$ が答えになります。