

Q. (数3 標準問題精講 P18 標問 6(3))

図示するまでの解説に書いてある流れが分かりません。

A.

まず(3)の流れとして、「①数列 $a_n$ が収束するような $a, b$ の条件を求めて」、「②その条件を座標上に表わす」というように考えてみてください。

$$a_n = \frac{b+(1-a)(a-b)^n}{1-a+b} \text{ について、}$$

(i) まず分母が0になる場合は特殊なので個別に調べます。

$1-a+b=0$  のとき、 $a-b=1$ なので、

$$a_n = \frac{b+(1-a)(a-b)^n}{1-a+b} = \frac{b+(1-a)1^n}{1-a+b} = \frac{b+1-a}{1-a+b} = 1 \quad \text{となり、収束するので条件を満たすことに}$$

なります。

また、 $a_n=1$ ならば $a_1=1$ なので、問題文1行目の条件より $a_1=a=1$

よって、 $b=a-1=0$ となります。

(ii) 次に、(i)以外の分母が0にならないときを調べます。

$1-a+b \neq 0$  のとき、 $a_n = \frac{b+(1-a)(a-b)^n}{1-a+b}$ が収束するためには、分子の $(1-a)(a-b)^n$ の

部分に注目します。

① $(1-a)=0$ のとき

$(a-b)^n$ の部分に関わらず、 $(1-a)(a-b)^n$ 全体が0となるので、

$a_n$ は定数 $a, b$ のみで表されるため収束します。

② $-1 < a-b < 1$ のとき

$-1 < x < 1$  ならば  $\lim_{n \rightarrow \infty} (x)^n = 0$  であることを利用して、 $\lim_{n \rightarrow \infty} (a-b)^n = 0$

よって、 $(1-a)(a-b)^n$ 全体が収束するため、 $a_n$ も収束します。