Q．（標準問題精講 3 P184 標問 79）解説の補助をお願いします。

A．(1)

不等式の証明の基本は、**(大きい辺) − (小さい辺) > 0を示すこと**です。不等号が2か所にある場合、1つずつに分けてそれぞれ証明を行います。

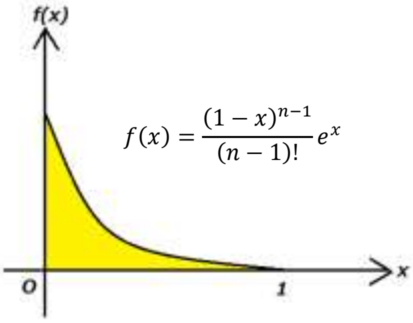
まずは(第2辺) − (第1辺) > 0を示します。

$$a_n - 0 = a_n$$

$a_n > 0$であることを示します。ここでa_nの被積分関数(∫ の中)に注目すると、

$$\frac{(1-x)^{n-1}}{(n-1)!}e^x$$

この関数は、$x = 1$のとき 0 ですが、$0 \leqq x < 1$のとき正の値をとります。**この値を$0 \leqq x \leqq 1$の範囲で積分するということは、右図の黄色部分の面積を求めるというイメージ**なので、正の値であることが分かります。このことを一般に述べると次のことが言えます。



積分可能な関数$f(x)$が、$a \leqq x \leqq b$の範囲で

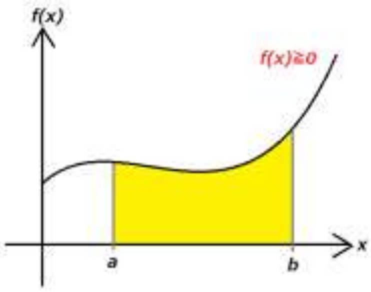
$$f(x) \geqq 0\ \left(ただし f(x) \neq 0\right)$$

のとき、

$$\int_a^b f(x)\ dx > 0$$

(なぜなら$\int_a^b f(x)\ dx =$ (黄色部分の面積))

が成り立つ



これより、

$$\int_0^1 \frac{(1-x)^{n-1}}{(n-1)!}e^x\,dx > 0$$

が言えるので、(第1辺) < (第2辺)が示せました。

次に$a_n < \dfrac{e}{n!}$を示します。

$$\Leftrightarrow \int_0^1 \frac{(1-x)^{n-1}}{(n-1)!}e^x\,dx < \frac{e}{n!}$$

左辺の被積分関数は、$(1-x)^{n-1}$とe^xと、変数の積になっているため、積分値を

求めるには計算が煩雑になることが予測できます。
しかし、今は実際の値を求めるのではなく、あくまで最大値の評価(つまり不等式の証明)さえできれば十分です。**そこで$(1-x)^{n-1}$かe^xのいずれか一方を、もとより大きい定数で置き換えて**簡単に計算をしてみることにします。

(Ⅰ)$(1-x)^{n-1}$を定数に置き換える場合、$0 \leqq x \leqq 1$の範囲では

$$(1-x)^{n-1} < 1^{n-1}(=1)$$

ですから、

$$\int_0^1 \frac{(1-x)^{n-1}}{(n-1)!} e^x \, dx < \int_0^1 \frac{1^{n-1}}{(n-1)!} e^x \, dx$$

という評価ができます。この右辺を計算すると

$$= \int_0^1 \frac{1}{(n-1)!} e^x \, dx = \left[\frac{1}{(n-1)!} e^x \right]_0^1 = \frac{e-1}{(n-1)!}$$

となります。したがって

$$a_n = \int_0^1 \frac{(1-x)^{n-1}}{(n-1)!} e^x \, dx < \frac{e-1}{(n-1)!}$$

が導けましたが、証明したい不等式と異なるため、この方法は不適切だったということが分かります。

(Ⅱ)e^xを定数に置き換える場合、$0 \leqq x \leqq 1$の範囲では

$$e^x < e$$

ですから、

$$\int_0^1 \frac{(1-x)^{n-1}}{(n-1)!} e^x \, dx < \int_0^1 \frac{(1-x)^{n-1}}{(n-1)!} e \, dx$$

という評価ができます。この右辺を計算すると

$$= \int_0^1 \frac{(1-x)^{n-1}}{(n-1)!} e \, dx = \left[\frac{1}{(n-1)!} \cdot \left\{ -\frac{(1-x)^n}{n} \right\} e \right]_0^1 = ◎$$

ここで、

$$\frac{1}{(n-1)!} \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n} = \frac{1}{n!}$$

となるので、

$$◎ = \left[\frac{-(1-x)^n}{n!} e \right]_0^1$$

$$= \left\{\frac{-(1-1)^n}{n!}e\right\} - \left\{\frac{-(1-0)^n}{n!}e\right\} = 0 - \left(\frac{-1^n}{n!}e\right) = \frac{1^n}{n!}e = \frac{e}{n!}$$

となります。したがって

$$a_n = \int_0^1 \frac{(1-x)^{n-1}}{(n-1)!} e^x \, dx < \frac{e}{n!}$$

が言え、証明したい不等式を導くことができました。

※解説のためにあえて(Ⅰ)の計算を行いましたが、実際の答案では(Ⅱ)だけを書けば十分です。

(2)

a_nの値を求める問題です。(1)とは違って積分値を実際に求める必要があります。

指数関数(e^x)を含む関数の積分の鉄則として、部分積分を行います。

$$a_n = \int_0^1 \frac{(1-x)^{n-1}}{(n-1)!} e^x \, dx = \int_0^1 \frac{(1-x)^{n-1}}{(n-1)!} (e^x)' \, dx$$

$$\Leftrightarrow \left[\frac{(1-x)^{n-1}}{(n-1)!} e^x\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{\{(1-x)^{n-1}\}'}{(n-1)!} e^x \, dx$$

$$\Leftrightarrow \left\{0 - \frac{1}{(n-1)!}\right\} - \int_0^1 \frac{(n-1)(1-x)^{n-2} \cdot (-1)}{(n-1)!} e^x \, dx$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{(n-1)!} + \int_0^1 \frac{(n-1)(1-x)^{n-2}}{(n-1)!} e^x \, dx \quad —◆$$

ここで、

$$\frac{n-1}{(n-1)!} = \frac{\cancel{n-1}}{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot (n-2)\cancel{(n-1)}} = \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot (n-2)} = \frac{1}{(n-2)!}$$

となるので、

$$◆ = -\frac{1}{(n-1)!} + \int_0^1 \frac{(1-x)^{n-2}}{(n-2)!} e^x \, dx$$

$$= -\frac{1}{(n-1)!} + a_{n-1}$$

したがって

$$a_n = -\frac{1}{(n-1)!} + a_{n-1}$$

という関係があります。ここでnを$n+1$に置き換えて書き換えると

$$a_{n+1} = -\frac{1}{n!} + a_n$$

これはa_nとa_{n+1}の関係式、つまり**漸化式を導いた**ことになります。これによって一般項a_nを求めることができます。

$$a_{n+1} - a_n = -\frac{1}{n!} \quad —(*)$$

$a_{n+1} - a_n$は階差数列なので、数列としては次のようになっていることが分かります。

$$\begin{array}{ccccccccccc} a_1 & & a_2 & & a_3 & & a_4 & \cdots & a_n & & a_{n+1} \\ & -\frac{1}{1!} & & -\frac{1}{2!} & & -\frac{1}{3!} & & & & -\frac{1}{n!} & \end{array}$$

これより、一般項a_nを求めるには、a_1にa_1からa_nまでの差をすべて足し合わせればよいことが分かります。つまり、$n \geqq 2$のとき

$$a_n = a_1 + (a_2 - a_1) + (a_3 - a_2) + (a_4 - a_3) + \cdots + (a_n - a_{n-1})$$

$$a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} (a_{k+1} - a_k)$$

$$= a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} \left(-\frac{1}{k!}\right) \quad (\because (*))$$

$$= a_1 - \left\{\frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{(n-1)!}\right\}$$

ここで、a_1を求めます。

$$a_1 = \int_0^1 \frac{(1-x)^{1-1}}{(1-1)!} e^x \, dx = \int_0^1 \frac{(1-x)^0}{0!} e^x \, dx$$

$$= \int_0^1 \frac{1}{1} e^x \, dx = \int_0^1 e^x \, dx = [e^x]_0^1 = e - 1$$

以上より、

$$a_n = e - \left\{1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{(n-1)!}\right\}$$

これは$n = 1$のとき($a_1 = e - 1$)も満たします。

したがって$n \geqq 1$のとき

$$a_n = e - \left\{1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{(n-1)!}\right\}$$

(別解)
問題にはすでにa_nの値が記されています。**ある値がすべての$\boldsymbol{n}$に対して正しいことを示すには、数学的帰納法を用いるという鉄則**があるので、数学的帰納法により証明することもできます。いずれの解法にせよ、$a_{n+1}=-\frac{1}{n!}+a_n$を導くという方針は変わらないため、ここでは省略させていただきます。

(3)
$1+\dfrac{1}{1!}+\dfrac{1}{2!}+\dfrac{1}{3!}+\cdots$の無限級数の値を、(1)(2)を利用して求めます。
(2)で求めたa_nの値と似たような形である(ただしa_nは**無限**級数ではない)ことに気づきましょう。**$\boldsymbol{a_n}$に$\boldsymbol{n}\to\infty$の極限をとって無限級数にします。**つまり

$$a_n=e-\left\{1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{(n-1)!}\right\}\leftarrow \text{無限級数ではない！}$$

$$\Downarrow$$

$$\lim_{n\to\infty}a_n=e-\left\{1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots\right\}\leftarrow \text{無限級数}$$

a_nの極限値を求めておく必要があります。ここで(1)の不等式を利用します。**不等式と、はさみうちの原理を用いて極限値を求める問題は頻出です。**
(1)で証明した不等式

$$0<a_n<\frac{e}{n!}$$

について、第 1 辺と第 3 辺について$n\to\infty$の極限をとると

$$\text{第 1 辺}: \lim_{n\to\infty}0=0$$

$$\text{第 3 辺}: \lim_{n\to\infty}\frac{e}{n!}=0\quad (\because n!\to\infty)$$

したがって、はさみうちの原理より

$$\lim_{n\to\infty}a_n=0$$

さきほど求めた$\lim_{n\to\infty}a_n$を代入して

$$e-\left\{1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots\right\}=0$$

$$\therefore 1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots=e$$

この問題を解くにあたっては数学 3 で学習した積分のほかに、数学 2 で学習した数列のテクニックを必要とします。また階乗(!)の扱い方にも慣れておく必要があるため、複数の単元の能力が試される融合問題となっています。**自分がどこの単元でつまずいたかを分析しておきましょう。**

(補足※高校で学習する範囲外の内容なので読み飛ばしても構いません)
問題(3)で求めた

$$e=1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots$$

は、eという無理数を無限級数で表しています。このように、**ある数値を無限級数で表すことを級数展開やテイラー展開といいます**。例えば、指数関数や三角関数は次のようにテイラー展開することができます。

$$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots$$

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\cdots+\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1}+\cdots$$

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\cdots+\frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n}+\cdots$$

これらのテイラー展開のやりかたは、実は問題に与えられていたa_nの式が関わってきますが、詳しくは大学の微積分学で学ぶことができます。