

Q. (標準問題精講3 p170 演習問題 73)

断面積を求めている式の $4t(1-t)$ がどう考えているかわかりませんでした。

A.

問題集の解答の方針は少し感覚的なので、実際に数式を用いて解答を作成します。

$P(0, a, 1)$ ($-1 \leq a \leq 1$), $Q(b, c, 0)$ ($b^2 + c^2 \leq 1$)

とおく。

すると、直線 PQ を考えることにより、直線 PQ と平面 $z=t$ との交点を R_t とすると、その座標は、 $R_t(b(1-t), ta+c(1-t), t)$ となります。

よって、ここで、 R_t が平面 $z=t$ 上で描く図形の面積が $S(t)$ であるとわかります。

$R_t(b(1-t), ta+c(1-t), t)$ ですので、 $(1-t)^2 b^2 + (1-t)^2 c^2 \leq (1-t)^2$ の円を、

Y 軸方向に ta 平行移動させた図形を描くと考えられます。

ここで、 $-1 \leq a \leq 1$ より $-t \leq ta \leq t$ です。

従って、解答 307 ページにあるように、半径 $1-t$ の半円二つと、

2 辺の長さが、 $2t$, $2(1-t)$ である長方形を合わせた部分を動かすと考えられ、

その長方形の面積が、 $4t(1-t)$ にあたります。