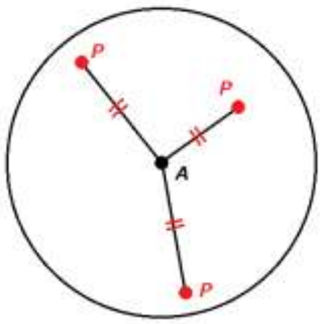
Q．（標準問題精講 2B P364 標問 165）解説の補助をお願いします。
A．
ベクトル方程式は、動点(本問では P 点)がある方程式を満たしながら動き、ある図形を描きます。その点から言えば数学 2 で学んだ図形の方程式と似たようなものです。したがって、例えば$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$が円を表すように、**方程式の形式から何の図形を表すのか判断できる**必要があります。

直線と円のベクトル方程式についてはそれぞれ例題 160,161 と例題 162 を参照してください。ここでは球のベクトル方程式について説明します。

球の定義は、「**空間において、ある点(中心)からの距離が同じである点の集合**」です。これをベクトル方程式で表しましょう。空間において点 P が、A(定点)を中心とする半径 r の球上にあるとすると、AP の長さが r で一定となるので

$$\boxed{\left|\overrightarrow{AP}\right| = r} \quad \text{—(I)}$$

と表せます。これが球のベクトル方程式の基本的な形です。

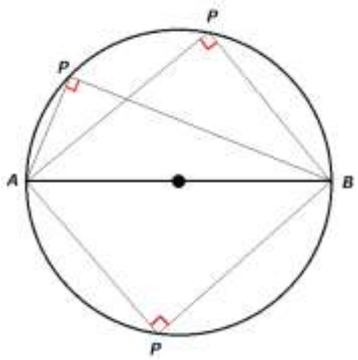


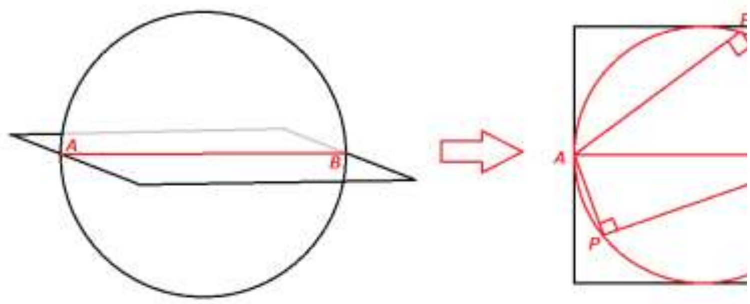
平面における円のベクトル方程式と同じ形で表すことができます。

また、平面において円上の点 P と直径 AB には

$$\angle APB = 90°$$

が常に成り立っているという性質がありました。これは空間においても同じです。
なぜなら下の図のように、直径 AB を通る任意の平面で球を切ると、その切り口は必ず直径 AB を通る円となるからです。





したがって、線分 AB を直径とする球のベクトル方程式は

$$\boxed{\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{BP}=0} \quad —(\mathrm{II})$$

と表します。これも平面における円のベクトル方程式と同じ形になります。

球のベクトル方程式には主に上の 2 形式があるということを踏まえ、本問の解説に移ります。

(1)$2\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{BP}=\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{BC}$

この方程式と(Ⅰ)(Ⅱ)を比較すると、内積があることもあり、**(Ⅱ)の形式に近づけられそうです。そこで(Ⅱ)の形になるように方程式を変形していきます。**

まずは右辺を左辺に移項し、$\overrightarrow{AP}$でくくります。

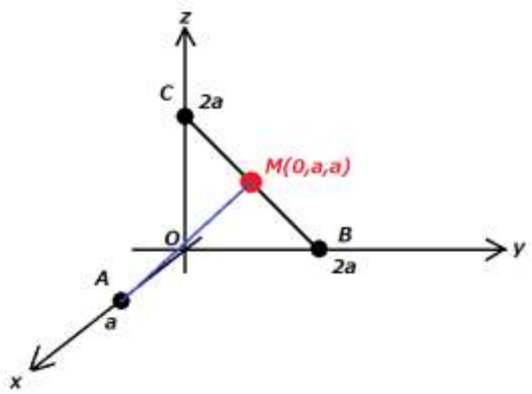
$$2\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{BP}-\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{BC}=0$$
$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AP}\cdot\left(2\overrightarrow{BP}-\overrightarrow{BC}\right)=0$$

両辺を 2 で割ります。

$$\overrightarrow{AP}\cdot\left(\overrightarrow{BP}-\frac{\overrightarrow{BC}}{2}\right)=0$$

$\boldsymbol{\dfrac{\overrightarrow{BC}}{2}}=\boldsymbol{\overrightarrow{BM}}$とおくと、点 M は下図のように、線分 BC の中点になります。

$$\overrightarrow{AP}\cdot\left(\overrightarrow{BP}-\overrightarrow{BM}\right)=0$$
$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{MP}=0$$



これは、線分 AP と線分 MP が常に直交する、つまり

$$\angle\mathrm{APM}=90°$$

であることを表しています。

これより、点 P が描く図形は、線分 AM を直径とする球面を描きます。

この球の中心は**線分 AM の中点**なので、

$$\frac{\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OM}}{2}=\frac{(a,0,0)+(0,a,a)}{2}=\left(\frac{a}{2},\frac{a}{2},\frac{a}{2}\right)$$

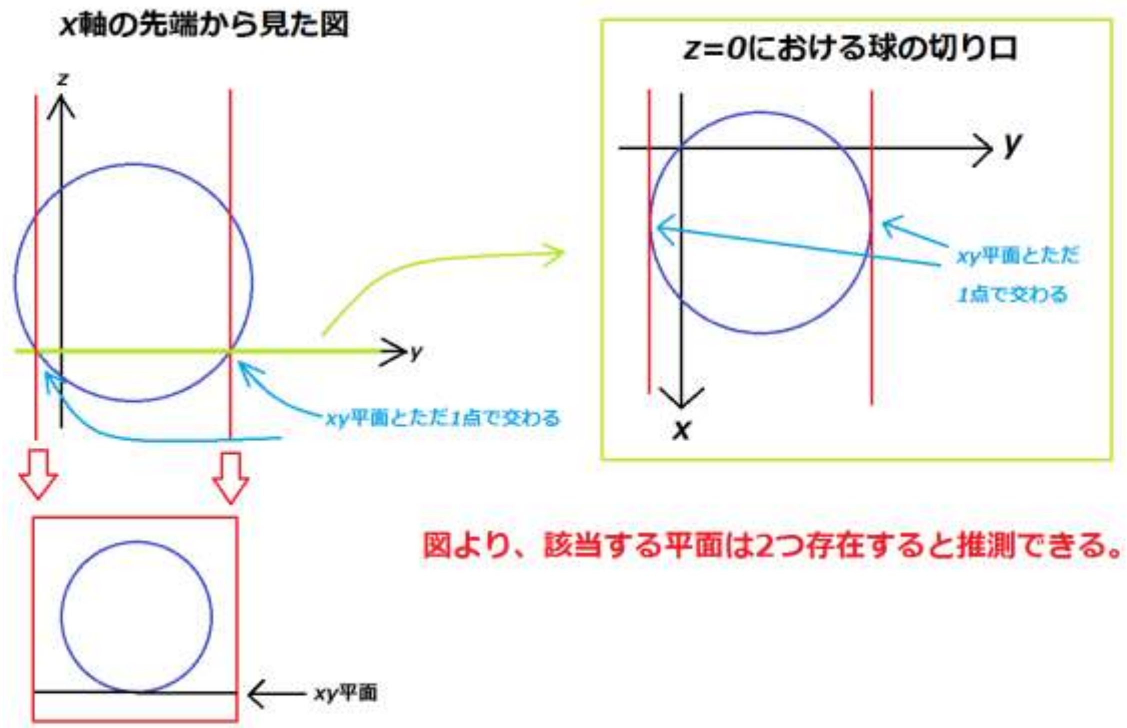
また球の半径は**線分 AM の長さの半分**なので、

$$\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AM}\right|=\frac{\sqrt{(0-a)^2+(a-0)^2+(a-0)^2}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}a$$

∴点 P は中心が$\left(\frac{a}{2},\frac{a}{2},\frac{a}{2}\right)$、半径$\frac{\sqrt{3}}{2}a$の球面を描きます。

(2)

(1)で求めた球面を下に青線で示しました。y軸に垂直な平面でこの球を切ったとき、切り口の円がxy平面とただ 1 点で交わるには、図の赤線のような位置(2 か所のうちいずれか)で切ればよいことになります。



球の中心は$\left(\frac{a}{2},\frac{a}{2},\frac{a}{2}\right)$、半径は$\frac{\sqrt{3}}{2}a$と既に分かっているので、球の方程式は

$$\left(x-\frac{a}{2}\right)^2+\left(y-\frac{a}{2}\right)^2+\left(z-\frac{a}{2}\right)^2=\frac{3}{4}a^2 \quad \text{―①}$$

と表せます。これを利用して解きます。

まず、y 軸に垂直な平面を

$$y=t \quad \text{―②}$$

とおきます。

平面の切り口というのは、図形と平面の共有する部分です。そこで①と②を連立させ、切り口の方程式を求めます。②を①に代入すると

$$\left(x-\frac{a}{2}\right)^2+\left(t-\frac{a}{2}\right)^2+\left(z-\frac{a}{2}\right)^2=\frac{3}{4}a^2$$

ここで、tやaは定数なので、左辺の第 2 項を右辺に移項して

$$\Leftrightarrow \left(x-\frac{a}{2}\right)^2+\left(z-\frac{a}{2}\right)^2=\frac{3}{4}a^2-\left(t-\frac{a}{2}\right)^2$$

となって、切り口は**zx平面に平行な円**となっていることが分かります。
この切り口の円はxy平面$(z=0)$とただ 1 点で交わる、つまり**接することになるので、$z=0$のとき、xが重解を持ちます**。先ほどの方程式に$z=0$を代入して

$$\left(x-\frac{a}{2}\right)^2+\left(0-\frac{a}{2}\right)^2=\frac{3}{4}a^2-\left(t-\frac{a}{2}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow \left(x-\frac{a}{2}\right)^2=\frac{3}{4}a^2-\left(t-\frac{a}{2}\right)^2-\left(\frac{a}{2}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow \left(x-\frac{a}{2}\right)^2=\frac{a^2}{2}-\left(t-\frac{a}{2}\right)^2$$

これをxの二次方程式とみなすと、

$$\left(x-\frac{a}{2}\right)^2-\frac{a^2}{2}+\left(t-\frac{a}{2}\right)^2=0$$

この左辺をグラフで表すと、頂点が$\left(\frac{a}{2},-\frac{a^2}{2}+\left(t-\frac{a}{2}\right)^2\right)$の放物線です。

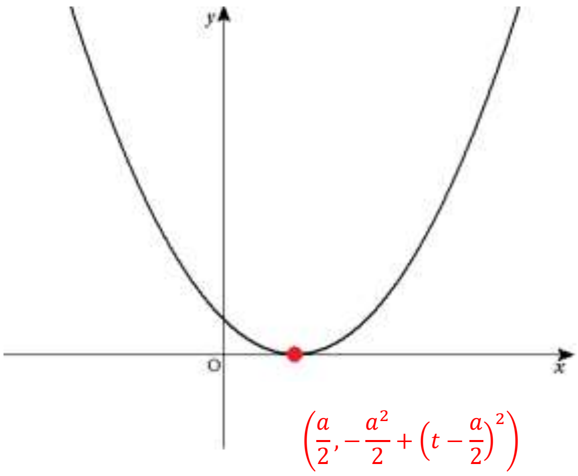
このxが重解を持つということは、右図のように**頂点でx軸に接するとき**なので頂点のy座標が 0 となります。したがって

$$-\frac{a^2}{2}+\left(t-\frac{a}{2}\right)^2=0$$

これよりtを求めます。

$$\Leftrightarrow \left(t-\frac{a}{2}\right)^2=\frac{a^2}{2}$$

$$\Leftrightarrow t-\frac{a}{2}=\pm\frac{a}{\sqrt{2}}$$



$$\Leftrightarrow t=\pm\frac{a}{\sqrt{2}}+\frac{a}{2}=\frac{\pm\sqrt{2}a+a}{2}=\frac{1\pm\sqrt{2}}{2}a$$

②より、$y=\frac{1\pm\sqrt{2}}{2}a$の平面で切ればよいことが分かります。
これを①に代入することで、**切り口の図形の方程式が求められます。**

$$\left(x-\frac{a}{2}\right)^2+\left(\frac{1\pm\sqrt{2}}{2}a-\frac{a}{2}\right)^2+\left(z-\frac{a}{2}\right)^2=\frac{3}{4}a^2$$

$$\Leftrightarrow \left(x-\frac{a}{2}\right)^2+\left(z-\frac{a}{2}\right)^2=\frac{3}{4}a^2-\left(\frac{1\pm\sqrt{2}}{2}a-\frac{a}{2}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow \left(x-\frac{a}{2}\right)^2+\left(z-\frac{a}{2}\right)^2=\frac{3}{4}a^2-\left(\pm\frac{\sqrt{2}}{2}a\right)^2$$

$$\Leftrightarrow \left(x-\frac{a}{2}\right)^2+\left(z-\frac{a}{2}\right)^2=\frac{3}{4}a^2-\frac{a^2}{2}$$

$$\Leftrightarrow \left(x-\frac{a}{2}\right)^2+\left(z-\frac{a}{2}\right)^2=\frac{a^2}{4} \quad \left(\text{かつ}y=\frac{1\pm\sqrt{2}}{2}a\right)$$

したがって、切断面の切り口は、

中心が$(x,y,z)=\left(\frac{a}{2},\frac{1\pm\sqrt{2}}{2}a,\frac{a}{2}\right)$、半径が$\frac{a}{2}$の円となります。

本問は(1)がベクトル方程式に関する問題ですが、(2)ではベクトルを用いず、二次方程式に置き換えて解いています。実際の入試では解き方を指定されることはほぼありませんから、必ずベクトルで解く必要はありません。**ベクトル方程式⇔二次方程式間の変換もためらわないように心がけておきましょう。**