Q．（数３標準問題精講 p. 209 標問 91(2)）
最初から何をやっているのか分かりません。

A．（２）

$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} x^3\left(1+\frac{b}{x}+\frac{c}{x^2}+\frac{d}{x^3}\right) = \pm\infty$（複号同順）

このことからわかるのは、関数ｙ＝f(x)のグラフが x→−∞のときはｘ軸よりも遥か下方の−∞まで行き、x→∞のときはｘ軸よりも遥か上方の∞まで行くということです。この問題の f(x)は連続、つまり f(x)のグラフは常につながっているので、x 軸の上方または下方から逆側に行く際に、どこかのタイミングで f(x)グラフはｘ軸を横切るということがわかります。ｘ軸をグラフが横切るとは、つまり f(x)=0 となる実数解をもつということです。
ここまでが、「実数解をもつ」という部分までの説明になります。

ここで f(z)=0 の実数解を z=k とすると、因数定理より$f(z) = (z-k)(z^2+pz+q)$とおけます。もとの３次式が実数係数の多項式であるという条件より、p, q も実数であることがわかります。なぜならもとの多項式の係数 b, c, d は、因数分解した形での係数 p, q, k をかけたり足したりして出てくる数であり、このもとの係数 b, c, d が実数になるには p, q も実数である必要があるからです。

３次式 f(z)=0 について、実数解 z=k を一つもつということが確認されたので、残りの解２つは因数分解により出てくる(z^2+pz+q)の部分から求められることになります。つまり、f(z)=0 が虚数解αをもつならば、そのαは二次方程式$z^2+pz+q=0$の解になります。
また、この二次方程式は実数解をもたないので、判別式D<0 より、$D=p^2-4q<0$　です。

ここで二次方程式$z^2+pz+q=0$の解は、解の公式を利用して$z=\frac{-p\pm\sqrt{4q-p^2}i}{2}$の２つとなります。
この$\pm$のうちの１つが複素数αなので、共役な複素数である$\bar{\alpha}$も解であるといえます。

【ポイント】
この問題は、「共役な複素数$\bar{\alpha}$も解であることを示せ」とありますが、実は、実数解を１つもつということさえ示せれば、残りの２つの虚数解は互いに共役な複素数の関係にあるということは二次方程式の性質より自ずとわかるようになっています。
実数解をもつことを示すというのは一見思いつきにくい条件なので、今回の流れを覚えて忘れないようにしましょう。