Q．（標準問題精講 3 標準問題集 p35　13-1(4)）
等比数列の和の処理が分かりません。

A．

$\frac{1+2+\cdots+2^{n-1}}{3^n}$

$=\frac{1}{3^n}\cdot\frac{1\cdot(2^n-1)}{2-1}$　←*等比数列の和* $S=\frac{a(1-r^n)}{1-r}$ *を利用*

$=\frac{2^n-1}{3^n}$

よって、$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+2+\cdots+2^{n-1}}{3^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n-1}{3^n}$

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n-1}{3^n}$

$=\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{2^n}{3^n}-\frac{1}{3^n})$

$=\sum_{n=1}^{\infty}\{\left(\frac{2}{3}\right)^n-\left(\frac{1}{3}\right)^n\}$

$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\frac{2}{3}\cdot\left\{1-\left(\frac{2}{3}\right)^n\right\}}{1-\frac{2}{3}}-\frac{\frac{1}{3}\cdot\left\{1-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right\}}{1-\frac{1}{3}}\right)$　←*部分和を求めて、それの極限を調べる*

$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\frac{2}{3}\cdot\left\{1-\left(\frac{2}{3}\right)^n\right\}}{\frac{1}{3}}-\frac{\frac{1}{3}\cdot\left\{1-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right\}}{\frac{2}{3}}\right)$　←*赤字の部分は 0 に収束*

$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\frac{2}{3}\cdot1}{\frac{1}{3}}-\frac{\frac{1}{3}\cdot1}{\frac{2}{3}}\right)$

$=\lim_{n\to\infty}\left(2-\frac{1}{2}\right)$

$=\frac{3}{2}$

【ポイント】
等比数列の和の公式が抜けていないか確認しましょう。
無限級数に関しては、まずは n までの部分和を求めてからその n を∞に飛ばすというのが基本的な考え方です。こちらもこの機会に確認してください。