

Q. (数学3 基礎問題精講 p.46 演習問題27)

ω に置き換えることはわかりますが、その次の解答の $\text{Im}\omega=0$ の解き方がよく分かりません。

A.

$\omega = \frac{z}{z+1}$ とおき、

「 $\frac{z}{z+1}$ が実数ならば」という条件なので、 ω も実数として扱います。

「複素数 z が実数 $\Leftrightarrow \text{Im}z=0$ 」を利用してよいということなので、 ω が実数であることから $\text{Im}\omega=0$ となります。

ω の虚部は、

$$\text{Im}\omega = \frac{\omega - \bar{\omega}}{2i}$$

$$= \frac{1}{2i} \left\{ \frac{z}{z+1} - \frac{\bar{z}}{\bar{z}+1} \right\}$$

$$= \frac{1}{2i} \left\{ \frac{z(\bar{z}+1) - \bar{z}(z+1)}{(z+1)(\bar{z}+1)} \right\}$$

$$= \frac{1}{2i} \left\{ \frac{z\bar{z}+z - \bar{z}z - \bar{z}}{(z+1)(\bar{z}+1)} \right\}$$

$$= \frac{1}{2i} \left\{ \frac{z - \bar{z}}{(z+1)(\bar{z}+1)} \right\}$$

と求められるので、

$$\frac{1}{2i} \left\{ \frac{z - \bar{z}}{(z+1)(\bar{z}+1)} \right\} = 0 \text{ とすると、} z - \bar{z} \text{ の部分が} 0 \text{ になる必要があるので、} z - \bar{z} = 0$$

いま、 z が実数であることを示したいので、再び「複素数 z が実数 $\Leftrightarrow \text{Im}z=0$ 」を使うと

$z - \bar{z} = 0$ から $\text{Im}z = \frac{z - \bar{z}}{2i} = 0$ より、 z は実数であることが示せました。