Q．（標準問題精講３ p. 181 標問 78(2) (ⅱ)）
(1)をどう使えばこの式になるのか分かりません。

A．
$\mathrm{Rn}(\mathrm{x}) = \frac{1}{1+x} - \{1 - x + x^2 - \cdots + (-1)^n x^n\}$であるので、
$\mathrm{Rn}(x^2) = \frac{1}{1+x^2} - \{1 - x^2 + (x^2)^2 - \cdots + (-1)^n (x^2)^n\} = \frac{1}{1+x^2} - \{1 - x^2 + x^4 - \cdots + (-1)^n x^{2n}\}$
となります。
(1)の結果を利用するために、まず０から１まで積分して

$\int_0^1 R_n(x^2)\,dx$

$= \int_0^1 [\frac{1}{1+x^2} - \{1 - x^2 + x^4 - \cdots + (-1)^n x^{2n}\}]\,dx$

$= \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx - \int_0^1 \{1 - x^2 + x^4 - \cdots + (-1)^n x^{2n}\}\,dx$

$= \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx - \left[x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \cdots + (-1)^n \frac{1}{2n+1} x^{2n+1}\right]_0^1$

$= \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx - \left\{1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \cdots + (-1)^n \frac{1}{2n+1}\right\}$ ←ここで、最終的に求めたい級数の**部分和**が出てきます。

$= \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx - \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1}$

(1)より $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 R_n(x^2)\,dx = 0$なので、極限をとると

$\lim_{n\to\infty}\{\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx - \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1}\} = 0$

$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = 0$ ←ここで、最終的に求めたい**無限級数の和**の形になります。

$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$

ようやく最終的に求めたい無限級数の和を$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx$として表すことができました。

ここからは、積分計算をしてこの積分の値を求めます。

$\mathrm{x} = \tan\theta$ とおくと、x:0→1 のとき θ :0→$\frac{\pi}{4}$　$\mathrm{dx} = \frac{1}{\cos^2\theta}d\theta$　これを用いて置換して

$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx = \lim_{n\to\infty} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{1+\tan^2\theta} \cdot \frac{1}{\cos^2\theta}\,d\theta = \lim_{n\to\infty} \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta = \frac{\pi}{4}$

$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4}$

よって、$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \cdots + (-1)^n \frac{1}{2n+1} + \cdots = \frac{\pi}{4}$