

Q. (数学標準問題 III 標問 57 (5))

解説 5.6 行目 \log の積分法を使うことは理解できますが、 $\frac{1}{2} \int \frac{1}{x^2-x+1}$ を足す意味がわかりません。

A. \log の積分を使うには、 \int の中身において、分数だった場合はその分数の分子が分母を微分した値になっていることが必要です。

今回、 $x^2 - x + 1$ の微分は $2x-1$ なので、今回登場した分数（分母が $x^2 - x + 1$ であるほう）を積分ができる形にすると、

$$\begin{aligned} \frac{1}{3} \int_0^1 \frac{-x+2}{x^2-x+1} dx &= \frac{1}{3} \int_0^1 \frac{1}{2} \cdot \frac{-(2x-1)-1+4}{x^2-x+1} dx \\ &= \frac{1}{3} \int_0^1 -\frac{(2x-1)}{x^2-x+1} dx + \frac{1}{3} \int_0^1 \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{x^2-x+1} dx \end{aligned}$$

これより、最初の \int の式は \log で表され、2 番目の \int の式は $\frac{1}{2} \int_0^1 \frac{1}{x^2-x+1} dx$

となります。この式は新しく足したのではなく、もともとの式の一部です。