

Q. (標準問題精講数3 p.61 演習23)

$x=0$  で連続の部分の証明が分かりません。(特に2行目)

A. 「ある点で連続」とは、簡単に言うと、その点付近で  $x$  の値を動かしていったときに、 $y$  の値が飛んだりせずになめらかに変化していくことです。今回は  $x=0$  で連続ということなので、

$x \rightarrow 0$  のときの  $g(x)$  の値がほとんど  $g(0)$  のときの値と変わらなければ証明はできたことになります。

$x \rightarrow 0$  は  $x \neq 0$  なので、与えられた条件より  $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$  です。さらに、

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - 0}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(x)}{x - 0} \text{ です。}$$

この最後の式は、微分係数の定義式なので、 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(x)}{x - 0} = f'(0) = g(0)$  となり、

$\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = g(0)$  であることがいえるので、証明できます。