

Q. ( 数学 標準問題精講 3 p98 演習問題 41 (1) (2) )

解答解説のやり方を読んだのですが、「こんなうまいやり方どうやって思いついたんだ?」と思いました。スムーズにいく人の頭の中の流れを指導いただきたく質問しました。

A.

まず、解答にも出てくるように、 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{e^x} = 0 \cdots \textcircled{1}$ であることは暗記しておきましょう。(  $y = x$  と  $y = e^x$  のグラフの増加量の違いから、なんとなくわかるはずです。) 今回の問題のように、 $e$  の  $x$  乗や、 $\log$  (←変換により  $e$  に直せる) が出てきたときは、 $\textcircled{1}$  の式を目指して式変形していけばうまくいくことが多いです。

(1) や (2) のような問題の変形の仕方は頻出なので、慣れるのが一番です。

以下に、解き方の流れを示します。

(1)  $\textcircled{1}$  のようにするためには、 $x$  を何かで置き換える必要があります。置き換えたときに  $\log$  を消せることと、 $x \rightarrow \infty$  のときに置き換えた文字が  $\infty$  になることが、 $\textcircled{1}$  の使える条件です。

$x = e^t$  とおけることに気が付けることが大事です。しかし、このままだと  $\frac{\log x}{\sqrt{x}} = \frac{t}{\sqrt{e^t}}$  となり、分母がややこしくなるので、 $x = e^{nt}$  とおいたほうが良いということになります。(このようにおくと、 $\log$  が消せ、 $x \rightarrow \infty$  のとき  $t \rightarrow \infty$  となって、 $\textcircled{1}$  を使えます。)

(2)  $\textcircled{1}$  のようにするために、 $x$  を何かで置き換える必要があります。(1) と違う点は、もとの式が  $x \rightarrow +0$  となっていることです。 $\textcircled{1}$  を使うためには、 $x \rightarrow +0$  のときに置き換えた文字が  $\infty$  になることが必要です。… $\textcircled{2}$

$\log$  を消したいので、 $x$  を  $e$  の式にして、かつ $\textcircled{2}$ の条件を満たしたいので、 $x = \frac{1}{e^t}$  と置けます。また、今回も $\sqrt{\quad}$ を式中に残したくないので、 $nt$  とすれば解消できます。