Q．（標準問題精講３　標問 80）
解説の補助をお願いします。

A．(1)不等式では、式をどちらかに集め、微分をして増加、減少について考えるのが一般的です。今回も、一度微分をした結果、$f`(x) = tanx - x$になります。この問題では、問題文の不等式が成り立つことを言えればよいので、$0 < x < \frac{\pi}{2}$において$\mathrm{x} < \tan x$がどうして成り立つのかについて厳密に述べる必要はないと思います。
　そして、$f`(x)$の結果から、最終的に与式が成り立つと証明できます。

（２）ここでは、∫（インテグラル）が入っているので容易に微分できません。
　次に考えるべきこととして、前問の利用があります。（１）と（２）で$\log\cos\ x$が共通であることから、（１）の両辺を積分すべきではないか？と考えられると思います。このようにして、右半分の証明ができます。
　左半分の証明がやや難しいと思います。まず、注目すべきなのが、左の式が２つに分かれている（$-\frac{\pi\log 2}{8}$と$\frac{\pi^3}{192}$）ということです。左の式と真ん中の式を比較するわけなので、真ん中の式も２つにわけて計算していくのではないか、と考えます。積分の式を複数に分ける方法として、部分積分が思いつくので、やってみると、$-\frac{\pi\log 2}{8} + \int_0^{\frac{\pi}{4}} xtanxdx$になります。左の式と真ん中の式で、$-\frac{\pi\log 2}{8}$が共通で現れるので、この解き方は正しいということをここで確信できます。
　そして最後に、$\frac{\pi^3}{192} < \int_0^{\frac{\pi}{4}} xtanxdx$ということを証明します。$xtanx$をこのまま積分することはできないので、何らかの方法で計算しようと考えます。思いつく方法としては部分積分や置き換えがありますが、部分積分をしても三角関数が消えることはなく、また置き換えもよいやり方が思いつかないので、不等式の性質を使って多少おおざっぱに計算しよう、と考えます。(←この考えに至るまで多少時間がかかると思います。)（１）より、$0 < x < \frac{\pi}{2}$において$\mathrm{x} < \tan x$ が成り立つと考えているので、この関係式を使い計算します。
　以上のようにして、不等式を証明します。