Q．（標準問題精講 2B　標問 10 研究）
交代式 $P(a,b,c)$ が a についての整式とみると a-b の因数を持つというところがわかりません。

A．
$P(a,b,c)$ は交代式であるので、a が入っていたところに代わりに b を代入すると、$P(b,b,c)=-P(a,b,c)$ となります。a=b とおくと、【研究】にもあるように $P(b,b,c)=0$ です。

「a についての整式とみる」とは、a を変数、その他の b, c を定数のようにして扱うとわかりやすいかと思います。つまり上の結果より、変数 a についての式 $P(a,b,c)$ について、a に b を代入すると、その式が 0 になるということです。

因数定理では、x についての方程式 $f(x)=0$ について $x=p$ が解のひとつであるとき、
$f(x)=(x-p)g(x)$ と書き換えることができました。($g(x)$ も x についての整式)
つまり、$(x-p)$ が x についての整式 $f(x)$ の因数になるということです。

$P(a,b,c)$ という整式について、$a=b$ のとき $P(a,b,c)=0$ という方程式が成り立ちます。つまり、a についての方程式とみなすと、b は解の一つということです。そのため因数定理より $P(a,b,c)=(a-b)Q(a)$ と書き換えられ、$(a-b)$ が整式 $P(a,b,c)$ の因数になります。

今回は a についての整式とみて b を代入するという作業を行って因数 $(a-b)$ を得ましたが、
交代式 $P(a,b,c)$ は a, b, c どの二つの組み合わせをとっても交代式として成り立つので、
これを b についての整式とみて c を代入することで因数 $(b-c)$ が、
c についての整式とみて a を代入することで因数 $(c-a)$ が同様に得られます。
よって、$(a-b)(b-c)(c-a)$ が因数になります。