Q．（標準問題精講３　演習 78(2) ）
2n+1 のときは In+In+2 に n=2 を代入するというのは理解できるのですが、n+1 のときの In への対応がよくわかりません。そもそも何故２倍して 2k+2 にする必要があるのでしょうか。

A．

$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$ について、

$I_n + I_{n+2} = \frac{1}{n+1}$を利用するために、

n→2n と置き換えて$I_{2n} + I_{2n+2} = \frac{1}{2n+1}$とすることで、分母が 2n+1 になります。

次に、

$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}$ について、$I_n + I_{n+2} = \frac{1}{n+1}$を利用したいのですが、この n のままでΣに代入すると、部分和を考えたときに

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k+1} = \sum_{k=0}^{n} \{(-1)^k \cdot (I_k + I_{k+2})\}$$

$= (I_0 + I_2) - (I_1 + I_3) + (I_2 + I_4) \cdot\cdot\cdot (-1)^n(I_n + I_{n+2})$ となります。

このままだと同じI につく符号が＋－で揃わないため、うまく消去されません。

そのため工夫して代入することが必要になります。

①そこで、各項を$\frac{1}{2}$倍したうえで全体を２倍することを考えます。

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} = 2\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2} \cdot \frac{(-1)^n}{n+1} = 2\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+2}$$

②次に、Σの中身に$\frac{(-1)^n}{2n+2}$対して、$I_n + I_{n+2} = \frac{1}{n+1}$を利用することを考えます。

n→2n+1 と置き換えることで $I_{2n+1} + I_{2n+1+2} = I_{2n} + I_{2n+3} = \frac{1}{2n+1+1} = \frac{1}{2n+2}$という式を得ます。

これら①と②の作業をしてからもとのΣに代入すると、

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k+1} = 2\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+2} = 2\sum_{k=0}^{n} \{(-1)^k \cdot (I_{2k+1} + I_{2k+3})\}$$

$= 2\{(I_1 + I_3) - (I_3 + I_5) + (I_5 + I_7) \cdot\cdot\cdot (-1)^n(I_{2n+1} + I_{2n+3})\}$ となります。

こうすると、＋－がうまく相殺されて$2\{I_1+(-1)^n I_{2n+3}\}$ だけが残ることになります。

【ポイント】式変形は、Σの式をΣを使わない多項式の形で表すことを目的に行っています。そのうえで、同じ項どうしが＋と－で相殺されて初項と末項のみが残り、計算できるという仕組みになっています。
その仕組みに適うような式変形をする必要があるので、どうしたらうまく相殺されるかを考えて式変形を工夫することが大切です。