

Q. (標準問題精講数 III p85 標問 36)

10-12 行目がどう判断したのかわかりません。

A.

$\frac{dz}{dx} = z\{\log x - \log(1-x)\}$  について

$z > 0$  なので、 $\frac{dz}{dx}$ の符号変化は $\{\log x - \log(1-x)\}$ の部分によって決まるということがわかります。

$\log x$ が増加関数なので、 $\{ \}$ の中身の $\log x$ と $\log(1-x)$ はどちらも増加関数です。そのため、 $\log x - \log(1-x)$ の正負は、 $\log x$ と $\log(1-x)$ の大小関係によって決まり、その正負が転換するのは $\log x$ と $\log(1-x)$ が等しくなったときの一点のみということになります。

そこで $\log x$ と $\log(1-x)$ の大小関係は、関数の型が  $1 \log$  で等しいため進数によって決まるということになります。

よって  $x - (1-x) = 2x - 1$  の符号について調べることで $\log x - \log(1-x)$ の符号がわかり、 $z\{\log x - \log(1-x)\}$ の符号がわかり、 $\frac{dz}{dx}$ の符号がわかるというわけです。

今回はたまたま二つの関数の型が同じだったので、進数の大小関係が関数の大小関係に対応していることを利用して、より簡単に解くために進数の符号を用いて考えました。一般的に解くには、 $\log x - \log(1-x)$ を一つの関数  $f(x)$  として考えて、 $f(x)$  を微分して増減表を書いて符号の変化を調べます。