Q．（標準問題精講 2B　標問 97(2)）
8 行目題意より～が右の説明を見てもよく分かりません。

A．
標問９６や標問９４にもある通り、
重解の条件は「f(x)=0 が x=a で重解をもつ」⇔「f(a)=0, f'(a)=0」
を使って式に直します。

ただ、今回の問題では x についての三次式の解を考えるのですが、三次式を式変形により
（一次式：$x-a$）×（二次式）の形に直すことができました。この三次式が重解を持つには
①（一次式）の解$x=a$を二次式も解に持つ⇒$x=a$が重解
②（二次式）が重解を持つ
の２パターンが考えられます。
今回は、p. 222 の４行目にもあるように、（二次式）の部分が$x=a$を解に持たないことがわかっているため、パターン②で考えることになります。

ここからは二次方程式の解の配置問題でよく扱ったように、判別式を利用します。
判別式$D_x=0$となればよいので、$D_x=0$となるような実数aが存在するための条件を求めていきます。

$$D_x=a^2-4(a^2+k+\frac{1}{3a^2+k})$$

$$=-\frac{9a^4+15ka^2+4k^2+4}{3a^2+k}$$

$3a^2+k$=0 の場合、(１) ②の式において $x-a=0$となります。つまり法線が直線$x=a$となるわけですが、これは三次関数の接線にはなりません。（三次関数の接線が「$x=$ *定数*」つまり y 軸に平行な直線になることはないため）よって、$3a^2+k$≠0 が保証されます。
なおこの部分の説明は、とにかく「$3a^2+k$≠0 であること」がいえればよいので、
「$3a^2+k$=0 だとだめな理由」を探すという発想からきています。

よって$D_x=0$となるためには分子の部分$9a^4+15ka^2+4k^2+4$が０になればよいということになります。解答では、$\mathrm{t}=3a^2$とおいて変数 t（t≧0)についての二次方程式の解の配置問題に持ち込んでいます。ここで、求める条件は「$g(t)=t^2+5kt+4k^2+4$ とおいたときに g(t)=0 が t≧0 で解をもつ」というように変わります。

まず t が正の解をもつことが大事なので、境目である t=0 のときを代入して調べると、
$g(0) = 4k^2 + 4$より y 切片は正であることがわかりました。
これにより、正の解をもつための y=g(t)グラフの形が満たすべき条件は
①軸が正
②x 軸と交点をもつ（頂点が x 軸よりも下に沈んでいる）
の二つになりました。
これを式にすると

①$-\frac{5k}{2} > 0$

②方程式 g(t)=0 の判別式$D_t \geqq 0$（※D_xと区別すること）

よって答えは
$9k^2 - 16 \geqq 0$、$k < 0$ の二つになります。

問題は k の範囲を求めよ、というシンプルなものなのですが
途中経過が
　変数 x についての三次方程式の解の配置問題
　変数 x についての二次方程式の解の配置問題
　実数 a の存在条件
　正の解 t の配置問題
と変わっていくところが複雑です。
今なんの作業をしていて、どの変数または実数を扱っているのか、なんの条件を求めているのかを常に意識しながら解くことがポイントです。