Q．（標準問題精講３　例題 86）
解説の補助をお願いします。

A．

(1) $A_{m,n}=\int_{-\pi}^{\pi} sinmxsinnxdx$ とおくと、

和積の公式を用いて、

$A_{m,n}=\frac{1}{2}=\int_{-\pi}^{\pi}\{\cos(m-n)\,x-\cos\,(m+n)x\}dx$

この積分計算をする過程で、分母に m-n が登場するので、下のように場合分けをします。
(ⅰ)m≠n のとき

$A_{m,n}=\frac{1}{2}\left[\frac{\sin\,(m-n)x}{m-n}-\frac{\sin\,(m+n)}{m+n}\right]_{-\pi}^{\uparrow\pi}=0$

(ⅱ)m=n のとき

$A_{m,n}=\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}(1-cos2nx)dx=\frac{1}{2}\left[x-\frac{sin2nx}{2n}\right]_{-\pi}^{\pi}=\pi$

以上より、題意が示された。

(2)
部分積分を用います。

$\int_{-\pi}^{\pi} xsinnxdx=2\int_{0}^{\pi} xsinnxdx$（∵xsinnx は偶関数）

$=2\int_{0}^{\pi} x(-\frac{cosnx}{n})'\ dx$

$=2\left\{\left[\frac{-xcosnx}{n}\right]_{0}^{\pi}+\int_{0}^{\pi}\frac{cosnx}{n}dx\right\}$

$=-\frac{2\pi}{n}\cos n\pi+2\left[\frac{sinnx}{n^2}\right]_{0}^{\pi}$

$=(-1)^{n+1}\frac{2\pi}{n}$

(3)
まず、In の積分の中身を考えます。
$(x-\sum_{k=1}^{n} a_k\,sinkx)^2=x^2-2\sum_{k=1}^{n} a_k\,xsinkx+(\sum_{k=1}^{n} a_k\,sinkx)^2$
このうち、第一項と第二項（(2)の結果を用いれば）は積分可能ですが、第三項はよくわかりません。そこで、まだ用いていない(1)がヒントになっていると考え、(1)が使えるよう

にこの項を変形すると、

$(\sum_{k=1}^{n} a_k \, sinkx)^2 = \sum_{k=1}^{n} {a_k}^2 \, sin^2 kx + \sum_{i \neq j} a_i \, a_j sinixsinjx$

となって、(1)を用いることで積分可能となります。

このように、大問の最後の小問はそれまでの小問が誘導になっていることが多いので、前問で導いたことでまだ用いていないものがあったら、それをどうすれば使えるようになるのかを考えることが重要です。

したがって、

$$In=\int_{-\pi}^{\pi} x^2 dx - 2\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\frac{2\pi}{k}a_k + \sum_{k=1}^{n}\pi {a_k}^2$$

$$=\frac{2\pi^3}{3} + \pi \sum_{k=1}^{n}\left\{{a_k}^2 - (-1)^{k+1}\frac{4}{k}a_k\right\}$$ （シグマ記号の中身をまとめた）

$$=\frac{2\pi^3}{3} + \pi \sum_{k=1}^{n}\left[\left\{a_k - (-1)^{k+1}\frac{2}{k}\right\}^2 - \frac{4}{k^2}\right]$$ （シグマ記号の中身をa_kについて平方完成）

ここまで、変形すると、a_kが変化することで関係してくるのは、上式の赤い部分だけであることがわかるので、

In は$\boldsymbol{a_k = (-1)^{k+1}\frac{2}{k}}$ (k=1, 2, ⋯, n)

のとき、最小となる。

この部分でのポイントは、a_kという変数として見ることになじみのない数列を変数として見て、式を変形していくことです。この場合の a_k は２次関数でいうところの、x と同じものと考えると分かりやすいと思います。