Q．（標準問題精講３　P.176 標問 76）
解説の補助をお願いします。

A．

$f(x)=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$の形で表される曲線をカテナリー（懸垂曲線）といいます。

対称性がきれいで、問題によく登場します。
カテナリーが出てきたら思い出さなければいけない性質として、

①$f(x)=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$　$f'(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$　$f''(x)=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$　、、、

・・・複数回微分すると$f(x)$と$f'(x)$が交互に出てくる

②　①より、$\int f(x)\,dx=f'(x)+C$
・・・複数回積分すると$f(x)$と$f'(x)$が交互に出てくる

③$f(x)^2-f'(x)^2=1$

$\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)^2-\left(\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right)^2=\frac{2\cdot2e^{x-x}}{2^2}=e^0=1$

などがあります。これらを使うことで計算が格段に楽になるので、覚えておきましょう。

（1）

孤の長さ　$\mathrm{L}=\int_a^b\sqrt{1+\left(\frac{\mathrm{dy}}{dx}\right)^2}\,dx$より

孤$AP=\int_0^t\sqrt{1+\mathrm{f}'(\mathrm{x})^2}\,dx$

☜　③$f(x)^2-f'(x)^2=1$

$=\int_0^t\sqrt{1+(\mathrm{f}(\mathrm{x})^2-1)}\,dx$

$=\int_0^t \mathrm{f}(\mathrm{x})\,dx$

☜　②$\int f(x)\,dx=f'(x)+C$

$=[f'(x)]_0^t=f'(t)-f'(0)=f'(t)$

（2）

直線ＱＨは傾き$f'(t)$の接線に垂直なので、傾き$-\frac{1}{f'(t)}$

よって直線の式は　$y=-\frac{1}{f'(t)}(x-t)$

点と直線の公式を使うために変形して　$x-t+f'(t)y=0$

これと、P（t,f(t)）との距離は、点と直線の公式に代入して

$\overline{PQ}=\frac{|t-t+f\prime(t)f(t)|}{\sqrt{1+f'(t)^2}}=\frac{f(t)f\prime(t)}{f(t)}=f'(t)$　　　　　分母：③$f(x)^2-f'(x)^2=1$

（1）より弧APはf'(t)なので、$f'(t)=\overline{PQ}=$弧AP

（3）

点Qは、直線PQと直線QHの交点なので、二本の直線の式を連立させて求めます。

まず、直線PQはPでの接線なので$y=f'(t)(x-t)+f(t)$

直線QHは$y=-\frac{1}{f'(t)}(x-t)$

よって連立して整理すると

$x=t-\frac{f'(t)}{f(t)}$, $y=\frac{1}{f(t)}$

(3)で問われているのはｔが０から１まで動くときのQが描く曲線の長さなので、曲線の長さの公式$\int_0^1\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt$に代入します。そのためにまず$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2$を求めると、

$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2=\left(1-\frac{f''(t)f(t)-f'(t)^2}{f(t)^2}\right)^2+\left(-\frac{f'(t)}{f(t)^2}\right)^2$　　　②$\int f(x)\,dx=f'(x)+C$　より　f"(t)=f(t)

$=\left(1-\frac{f(t)^2-f'(t)^2}{f(t)^2}\right)^2+\left(\frac{f'(t)}{f(t)^2}\right)^2$

$=\left(\frac{f(t)^2-f(t)^2+f'(t)^2}{f(t)^2}\right)^2+\left(\frac{f'(t)}{f(t)^2}\right)^2$

$=\left(\frac{f'(t)^2}{f(t)^2}\right)^2+\left(\frac{f'(t)}{f(t)^2}\right)^2$

$=(\frac{f'(t)^4+f'(t)^2}{f(t)^4})$

$=(\frac{f'(t)^2(f'(t)^2+1)}{f(t)^4})$

$=(\frac{f'(t)^2(f'(t)^2+1)}{f(t)^4})$　　　③$f(x)^2-f'(x)^2=1$

$=(\frac{f'(t)^2f(t)^2}{f(t)^4})=\left(\frac{f'(t)}{f(t)}\right)^2$

これを先ほどの曲線の公式に代入して

$$\int_0^1 \sqrt{\left(\frac{f'(t)}{f(t)}\right)^2}\,dt=\int_0^1 \left(\frac{f'(t)}{f(t)}\right)dt$$

☜ $(\log x)'=\frac{1}{x}$ を利用

$=[logf(t)]_0^1=\left[log\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right]_0^1=log\frac{e^1+e^{-1}}{2}$-log1

$= \boldsymbol{log\frac{e^1+e^{-1}}{2}}$

この問題はテーマとしてはよくある微分積分の問題だと思いますが、計算や微積の処理の段階でカテナリーの性質を使わないと計算処理に戸惑うようになっています。

最初に挙げた①～③の性質は、カテナリーを見たらすぐに思い出せるようにしておきましょう。