Q．（標準問題精講３　例題 85）
解説の補助をお願いします。（＾ x が単調増加だから f'(t)の符号が次数と一致するという考え方がほかではあまり見ないので戸惑いました）。

A． $g(x)=2^{x^2}$ の原始関数を G(x)とすると、
$f(t)=G(2t)-G(t-3)$
$f'(t)=G'(2t)(2t)'-G'(t-3)(t-3)'$
$=2g(2t)-g(t-3)$
$=2^{4t^2+1}-2^{(t-3)^2}$

このように積分区間にそれについて微分する文字が含まれている関数を微分する際は、解析学の基本定理を丸暗記するだけではなく、証明するときに考えたように原始関数から考えることが大事です。

2^x は増加関数であるから、f'(t)の符合は $4t^2+1$ と $(t-3)^2$ の大小関係、すなわち
$4t^2+1-(t-3)^2$
$=3t^2+6t-8$
$=3(t-\frac{-3-\sqrt{33}}{3})(t-\frac{-3+\sqrt{33}}{3})$
の符合と一致する。
最大最小を求めるためには、f(t)の増減表が書ければよく、そのためには f'(t)の符合がわかればよい。いま、f'(t)は同じ 2 を底とする一つの関数からもう一つの関数を引く形になっているので、f'(t)の符合を知るためには、二つの関数の大小関係がわかればよく、2^x は増加関数であるから、それは $4t^2+1$ と $(t-3)^2$ の大小関係と一致する。
つまり、2^x は増加関数なので、異なる二つを比べたときに、2 の肩の部分が大きいほうが、大きいということです。

$\alpha=\frac{-3+\sqrt{33}}{3}$ とおくと、$\sqrt{33}<6$ より、

$0<\alpha<\frac{-3+\sqrt{33}}{3}<\frac{-3+6}{3}=1$

であるから、

t	0	…	α	…	2
f'(t)		−	0	+	
f(t)		↘		↗	

と増減表が書ける。

f(t)の最大値を考えるには、f(0)とf(2)の大小関係がわかればよく、

$f(0)=\int_{-3}^{0} 2^{x^2}dx=\int_{0}^{3} 2^{x^2}dx$ (y=g(x)はy軸に関して対称であるから)

$f(2)=\int_{-1}^{4} 2^{x^2}dx>\int_{0}^{3} 2^{x^2}dx$

以上より、

f(t)を最大にするtは t=2

f(t)を最小にするtは $t=\frac{-3+\sqrt{33}}{3}$