

Q. (標準問題精講 2B 例題 107)

解説の補助をお願いします。

A.

この問題においてガラス棒の底面の半径を x 、高さは y とすると、 $V = \pi x^2 y$ とすることができるとわかる。ここで、 $x \leq b$ については高さ $h = y$ となる。すると $V = \pi x^2 h$ となる。 $x = b$ で最大となるので、 $x \leq b$ では $V = \pi b^2 h$ で最大となる。

一方 $b \leq x$ については p241 の下の図のようになる。ここで大切なのが、 V を x か y の式で表せるようにすることである。 x か y だけ表せれば、片方が変数だと考えて動かして、最大値が求まると考える。(2変数の最大値を求めるのは難しい) $x = a$ と b と y の式にするために相似を利用している。相似を考えると、

$y = \frac{a-x}{a-b}h$ と置ける。よって $V = \pi x^2 \frac{a-x}{a-b}h$ となりこの最大値を考える。 $\pi x^2 \frac{a-x}{a-b}h = f(x)$ とおく。すると以下のように場合分けして増減表になる。

i $b \geq \frac{2a}{3}$ のとき

x	b	
$f'(x)$		-
$f(x)$	$\pi b^2 h$	$\searrow \square$

ii $b \leq \frac{2a}{3}$ のとき

x	b		$\frac{2}{3}a$	
$f'(x)$		+	0	-
$f(x)$		$\nearrow \square$	$\frac{4}{27} \frac{a^3}{a-b} h$	$\searrow \square$

よって $\frac{3}{2} \geq \frac{a}{b}$ のとき $x = \frac{2a}{3}$ $1 < \frac{a}{b} < \frac{3}{2}$ のとき $x = b$