Q．（標準問題精講３　標問 44）
解説の補助をお願いします。

A．（１）
$\{f(x)\}^2+\{f'(x)\}^2=1\ldots$①を証明するという情報だけでは、なかなか「$F'(x)=0\Rightarrow F(x)=定数$」を利用して示すということには結び付きにくいと思います。
ただし、この問題では$f''(x)=-f(x)$という条件があることから、①をもう一度微分すると二回微分$f''(x)$が出てきて条件式が使えそうだという発想が浮かびます。
実際に解いてみると
$F(x)=\{f(x)\}^2+\{f'(x)\}^2$とおく
$F'(x)=2f(x)f'(x)+2f'(x)f''(x)$
$\quad=2f'(x)\{f(x)+f''(x)\}\ =2f'(x)\{f(x)-f(x)\}=0$
よって$F'(x)=0\Rightarrow F(x)=C$：定数
$F(0)=C$　より$F(0)=\{f(0)\}^2+\{f'(0)\}^2=1+0=1$
$\boldsymbol{F(x)=\{f(x)\}^2+\{f'(x)\}^2=1}$

（２）
$f(x)$が多項式に挟まれています。
不等式の証明として、「大きいほうから小さいほうを引いた式を作って、その式が正であることを証明する」や「相加相乗平均の利用」などが考えられます。今回はオーソドックスな前者の方法を用います。
まず、簡単な左の大小関係から示します。

$g(x)=f(x)-\left(1-\frac{x^2}{2}\right)$とおき、$g(x)\geqq 0$であることを示す。

このままでは$f(x)$が漠然としていてわからないので、条件式を利用するためにも何回か微分して関数 g(x)の挙動を調べてみようという発想になります。
$g'(x)=f'(x)+x$
(1)と同様に、もう一度微分すると二回微分$f''(x)$が出てきて条件式が使えそうなので（他の理由としては解答にもあるように、関数 g(x)の増減を表す g'(x)の符号決定がまだできないのでもう一度微分して g'(x)の増減を調べるという発想でもあります）
$g''(x)=f''(x)+1$
$\quad=-f(x)+1$
このあとは、x≧0 の範囲において
g''(x)>0→g'(x)は増加関数
→g'(x)は単調増加するから、g'(x)のとる値は最小値 0 よりも大きくなる→g'(x)≧0

→g(x)は増加関数→g(x)は単調増加するから、g(x)のとる値は最小値 0 よりも大きくなる
→g(x)≧0
の流れで示していきたいので、まずは g"(x)>0 を示すことが必要です。
$g''(x) = -f(x)+1$　から、f(x)が 1 よりも小さいことを言えばよいので
（１）の誘導を利用することを考えると、$\{f(x)\}^2 + \{f'(x)\}^2 = 1$
$\{f(x)\}^2 = 1 - \{f'(x)\}^2$　$\{f'(x)\}^2 \geqq 0$より
$\{f(x)\}^2 = 1 - \{f'(x)\}^2 \leqq 1$
よって、$-1 \leq f(x) \leq 1$ なので、$g''(x) = -f(x)+1 \geqq 0$ が言えました。
導関数が常に正であることより$g'(x)$は単調増加するので、x≧0 の範囲では
$g'(x) \geqq g'(0) = f'(0) + 0 = 0$
よって導関数が常に正であることより$g(x)$は単調増加するので、x≧0 の範囲では
$g(x) \geqq g(0) = f(0) - 1 = 0$
ここで、　$g(x) \geqq 0$　すなわち　$f(x) \geqq \left(1 - \frac{x^2}{2}\right)$　が示せました。

続いて、不等式の右の大小関係である$1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} \geqq f(x)$を示します。これも g(x)≧0 を示す流れと同様です。途中で g(x)≧0 を利用することで、微分の回数を減らして簡単に示すことができます。

一次導関数、二次導関数が出てきてごちゃごちゃしますが、上に黄色で示した流れを常に頭において、今どの段階を示しているのかを意識しながら解くとよいと思います。
f'(x)>0 からすぐに f(x)>0 と分かるわけではなく、「f'(x)>0 から f(x)が増加することが分かって、0 よりも大きくなることから f(x)>0 である」というところは特に間違いやすいので気を付けてください。

（３）
解の配置問題です。ただ一つの解をもつという条件から、範囲の中で y=f(x)グラフが x 軸と一度だけクロスすることを示します。
ただ一つの解をもつには、f(0)=1>0 であることがわかっているので、（０，１）から①グラフが単調減少して、②0<x<2 の範囲で x 軸に潜ること(f(2)<0)の二つを示せばよいということになります。
まず、f(x)の導関数 f'(x)が負であることから、減少することを示します。
f'(x)は(2)の過程で登場したので、これを利用することを考えます。
(2)前半の　$f(x) \geqq \left(1 - \frac{x^2}{2}\right)$　の証明では$-1 \leq f(x) \leq 1$ であることしかわからないので、後半

の　$1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24} \geqq f(x)$　の証明を利用します。

$-\mathrm{x}+\frac{x^3}{6}-f'(x) \geqq 0$　より$f'(x) \leqq -x+\frac{x^3}{6}$

<u>$-x+\frac{x^3}{6}$が 0 より小さいことが言えればよい</u>ので、変形して

$\mathrm{f}'(\mathrm{x}) \leqq -x+\frac{x^3}{6}=\frac{\mathrm{x}^3-6x}{6}=\frac{\mathrm{x}(x^2-6)}{6}$

求める範囲が 0<x<2 なので、この範囲では$\frac{\mathrm{x}(x^2-6)}{6}<0$より$\mathrm{f}'(\mathrm{x})<0$

範囲の左端である x=0 で f(0)>0 で、そこから減少するところまでわかったので
次に、範囲の右端である x=2 で f(2)<0 を示します。
直接 f(x)に代入することができないので、また（２）の不等式を利用します。

$1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24} \geqq f(x)$に x=2 を代入して

$f(x) \leqq 1-\frac{2^2}{2}+\frac{2^4}{24}=-\frac{1}{3}<0$

①②ともに示せたのでグラフが範囲内で唯一の x 軸との交点を持つことが示せました。
よって、f(x)=0 が 0<x<2 にただ一つの解をもつことが分かりました。

この証明問題は、先に示すべき項目を整理したうえでそれに近づくように式変形や適切な値の代入などをしていくという流れです。
<u>下線</u>を引いたところが示すべき項目なので、これを言葉から式に直す作業をしていきます。
小問の**誘導**、問題文中の**条件式**や**範囲**などを利用して示していくことが多いので、これらを常に頭において使えるようにしておきましょう。

また、解説にもありますが本問は f(x)=cosx と想定することで、三角関数の性質を考えることができ解き方の目途が立てやすくなります。
逆に言うと、cosx については今回示した性質が利用できるということですので、似たような問題が出た時に思い出せるようにしておきましょう。