

Q. (数学 標準問題精講 例題87)

解説の補助をお願いします。

A.

一見この問題は x と t の二文字が入っていたり絶対値があったりと、複雑な問題のように思えてしまいますが、実際はそんなことはありません。

むしろ当たり前のことを順番にやっていけば難なく解ける問題です。その点を意識しながら考えていきましょう。

(1) について。

まず絶対値があると考えづらいので取りたいな、と考えます。正負で場合分けが必要なのか・・・と思いきや、今回の積分区間は $-x \sim x$ です。これを見てすぐ思いついてほしいのは偶関数と奇関数を疑うことです。すると今回は絶対値がでてくるので偶関数であると気づけ、2を前に出して絶対値を外せます。

次に t と x の二文字についてですが、ここではどちらが今変数なのかということを考えるようにしましょう。Jの中では t が変数で、 x は1や2と同じような定数だと考えましょう。すると(多項式) × (三角関数) の積分だとわかって、これは部分積分で解けます。これで(1)は終了です。

次に(2)について。

(1)で求めた $f(x)$ を用いるのですが、中身が x/a となっておりわかりにくいです。そこで簡単にするためにこれを t と置いてしまいましょう。すると置換積分の要領で式を書き換えることができます。中身が無駄に複雑な積分の問題では置換積分が有用な場合が多いので覚えておきましょう。

$g(a)$ とおいてあとは積分をすればいいだけと思いきや、この積分ができません。積分でそのまま求まってしまうようなら極限を求めさせることはないはずなので納得です。

逆に、極限だけでいいなら、とりあえず a を大きくしたとき取る値を推測できればいいんだなと発想の転換をします。推測した後ではさみうちなどで証明するのが、極限の解き方の定石です。

今回もまず推測で極限值を求めてみます。積分区間を見て観ると $\pi \sim \pi + 1/a$ で a が十分大きいときには幅の非常に小さい面積を求めることになります。これは、区分求積法と似た考え方であり、細長い長方形(帯)に近似できそうです。そこで実際に長方形の面積を求めてみると $4/\pi$ となり、これが答えとなりそうです。

ではどうやって示すかが次の問題となります。一般的にはここではさみうちの原理を使うのが万能です。p201の図を見てもらえればわかる通り、大小二つの長方形で面積をはさむことができます。あとは不等式をたててはさみうちの原理を使うだけです。ただ、解説で

は平均値の定理を使っています。 $g(a) = a \times 1/a \times f(s)$ を満たす s が $\pi \sim \pi + 1/a$ に存在しており、 s は π にとぶから答えが $f(\pi)$ になるという解き方です。ただ、これは結局 s をはさみうちで求めているので実質やっていることは上の解き方と一緒にです。また、この状況で平均値の定理を思いつくのはやや難な気がするので、定石通り長方形の面積ではさみこんで不等式を立てるやり方が一番無難かと思います。