

Q. (数ⅡB標準問題精講 p172 演習問題 75-2)

解法の流れとして、 $\sin x = X$ と置いたとき、 $0 \leq x \leq \pi$ だから $0 \leq X \leq 1$ の中でただ一つの解を求める条件を調べると思いますが、解答ではなぜいきなり $X=1$ のとき不適だというのが分かるのでしょうか。

A.

この問題は、問題文にある通り x が異なる 2 つの解を持つための a の条件を求める問題です。

解き方として三角関数のままだと方程式として扱いにくいので、三角関数を $\sin x = X$ のように X で置き換えることが必要になってきます。

この置き換えにおいて、 x の解の個数と X の解の個数は必ずしも一致しないことが非常に大切になります。

例えば X の解が一つで $1/2$ であれば、それに対応する x は $\pi/6$ と $5\pi/6$ の二つになります。

このように考えてみると、 $0 \sim 1$ のほとんどで X 1 つに対して x 2 つとなります。

x が異なる 2 つの解をもてばよいので、 X がただ一つの解も持てばよいこととなります。

ただし、例外があってそれが $X = 1$ の時です。

$X = 1$ の時は対応する x が $x = \pi/2$ だけで、 X 1 つに対して x も 1 つです。

なので、 x が異なる 2 つの解を持つためには、 X も異なる 2 つの解を持つ必要があります。

しかし、 $X = 1$ 以外のもう一つの解は対応する x が 2 つあるので、結果的に x の解が 3 つできてしまって条件を満たしません。よって $X = 1$ の時は不適ということが出来ます。

よって、 X の解が $X = 1$ 以外でただ一つの解を持つ条件を求めればよいこととなります。