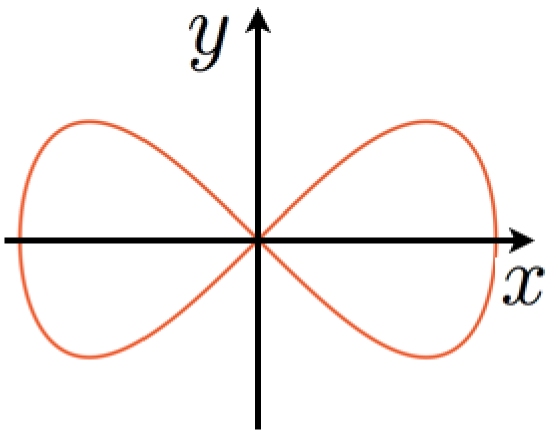
Q．（標準問題数 3 p263 演習 112(1)）
研究の部分を読んでも解答の式で面積が求められる理由がわかりません。

A．
まずこのグラフは x 軸について対称なのか、y 軸について対称なのかを調べる必要があります。なぜなら、もしどちらについても対称であれば、第一象限の面積だけ求めてそれを 4 倍するといったような計算の工夫が可能だからです。これはあらゆる曲線の面積を求めるときに考えるべきことなので覚えておきましょう。
まず x 軸対称かを調べる方法は θ に $-\theta$ を代入して値が変わらないかを見ることです。今回は cos なので $-\theta$ にしても値は変わりません。
次に y 軸対称か調べる方法は θ に $\pi-\theta$ を代入して値が変わらないかを見ることです。（この意味が分からなければ自分で図を描いてみてください）今回は $\cos 2\theta$ が $\cos(2\pi-2\theta)=\cos 2\theta$ と値が一致するので y 軸対称とも言えます。
また、レムニスケートのグラフは以下のようになります。（覚えておいて損はないでしょう）



これをみてもわかる通り、x 軸・y 軸対称のグラフであるため、まず第一象限内に含まれる面積を求めてから、それを 4 倍すれば求めたい面積がもとまります。
では、第一象限にあたる θ の角度はいくつなのかを考えます。$\cos 2\theta$ は$\sqrt{\ }$の中に含まれているのでこの時点で正でなくてはなりません。よって $0\leqq 2\theta\leqq 2\pi$ の範囲で考えれば、$0\leqq 2\theta\leqq \pi/2$、$3\pi/2\leqq 2\theta\leqq 2\pi$ となります。これは θ に変換すると $0\leqq\theta\leqq\pi/4$、$3\pi/4\leqq\theta\leqq\pi$ となります。第一象限内の θ の角度は $0\leqq\theta\leqq\pi/2$ ですから、第一象限にあたる θ の角度は $0\leqq\theta\leqq\pi/4$ となります。

それでは本題に入りたいと思います。研究の図で描かれている面積が

$$S=\frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} f(\theta)^2 d\theta$$

と書かれる理由について。

普段やっている積分はとても狭い幅のΔｘに高さｙの細長い長方形を何個も足し合わせて面積としているのでした。
それに対して今回は、とても小さいΔ θ に対して扇形を考えて、それらを何個も足し合わせると考えます。θ がとても小さいので扇形に近似して考えることができるのです。
角はΔ θ で半径はｒの扇形の面積は

$$\frac{1}{2}r^2\Delta\theta$$

です。r=f(θ)で、角度 α 〜 β まで足し合わせるので

$$\mathrm{S}=\frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta}f(\theta)^2d\theta$$

と書けます。
今回の（１）でも同様にして角度０〜 θ /4 で考えています。