

Q. (標準問題精講 3 標問 90)

解説の補助をお願いします。

A. 与式には $\int_0^x f(x-t)e^{-t}dt$ という形が出てきます。これを x で微分しようとしても、 $f(x-t)$ の部分があるので、微積分の基本定理を使うことができません。

このように、積分区間に微分する文字があり、積分する関数 $f(t)$ の t の中にも微分する文字がある場合は、置換をする必要があります。

$u=x-t$ とおくと、

$dt=-du$ 、 $t:0 \rightarrow x$ のとき、 $u:x \rightarrow 0$

であるから、

$$\begin{aligned}\int_0^x f(x-t)e^{-t}dt &= \int_x^0 f(u)e^{u-x}(-du) \\ &= e^{-x} \int_0^x f(u)e^u du\end{aligned}$$

と変形できる。

ゆえに与式は、

$$f(x) = (x^2+1)e^{-x} + e^{-x} \int_0^x f(u)e^u du \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

これを x で微分すると、

$$\begin{aligned}f'(x) &= 2xe^{-x} - (x^2+1)e^{-x} + (e^{-x})' \int_0^x f(u)e^u du + e^{-x} \left\{ \int_0^x f(u)e^u du \right\}' \\ &= 2xe^{-x} - (x^2+1)e^{-x} - e^{-x} \int_0^x f(u)e^u du + e^{-x} f(x)e^x \\ &= f(x) + (2x - x^2 - 1)e^{-x} - e^{-x} \int_0^x f(u)e^u du \quad \cdots \cdots \textcircled{2}\end{aligned}$$

① + ②より、 $e^{-x} \int_0^x f(u)e^u du$ を消去して、

$$f(x) + f'(x) = f(x) + 2xe^{-x}$$

$$f'(x) = 2xe^{-x}$$

この①と②を足し合わせる部分は難しいですが、 e^x を含む式を微積分すると、同じ項が出現するので、微分前の式と微分後の式を足し引きするとうまくいくことが多々あります。

ゆえに

$$f(x) = \int 2xe^{-x} dx$$

$$= -2xe^{-x} + 2 \int e^{-x} dx$$

$$= -2(x+1)e^{-x} + C$$

ここで、①に $x=0$ を代入すると、

$$f(0) = 1$$

であるから、

$$F(0) = -2 + C$$

$$C = 3$$

以上より、 $f(x) = 3 - 2(x+1)e^{-x}$