

標準問題精講 2B 例題 110

[解説]

$(x+y)^3 \geq ax^2y$ を見て、変数が x, y 2つあり、どちらについて考えていけばいいのかわからない。2変数の場合のやり方は2通りある

1, 2つの変数を一つの変数にまとめる

2, 1つをまず固定し(定数だと考える)もう片方を変数だと考え、次に、固定していた方を変数だと考える(予選決勝法と同じ考え方)

まず1でできないか考え、無理なら2を考える。

今回 $(x+y)^3 \geq ax^2y$ の式の特徴に注目すると両辺を x^3 で割ると $\frac{y}{x}=t$ とすると、 $(1+t)^3 \geq at$ と表せる。ここで t は x, y が実数全て動くということは t も正の実数全てを動くということに注意する。 t が正の実数全体を動くときの $(1+t)^3 \geq at$ が常に成り立つ a を考えればよい。考え方は2通りある

(1) $(1+t)^3$ と at を比べ $(1+t)^3$ のグラフが at のグラフより、上にくるように a をとる。これは接線を考えればよい。

(2) $\frac{(1+t)^3}{t} \geq a$ とおき $\frac{(1+t)^3}{t}$ のグラフの最小値を考える。

今回計算のやりやすさを考えると(1)の方がよいとわかる。

$f(t)=(1+t)^3$ と at が接する接点を $t=\alpha$ の点とすると以下の式が成り立つ。

$$f'(\alpha)=a$$

$$f(\alpha)=a\alpha$$

ここで $(1+t)^3$ のグラフを描くとわかるが $\alpha > 0$ である。

これをとくと $\alpha = \frac{1}{2}$ 、 $a = \frac{27}{4}$ とわかる。

よって $a \leq \frac{27}{4}$ となる。(グラフを描くとわかりやすい)