

Q. (標準問題精講 数2B p.15 標問3 (iv))

なぜ $P \geq 5$ と(III)の結果より、求める余りが 3 となるのでしょうか。

A.

「 3^p 」の形が登場していたり、問題の条件も p は 5 以上の「素数」など、前の (iii) と共通した部分があるところがあり、(iii) の結果を誘導として使いそうだなと考えます。

$(x+1)^p$ より、 $x=2$ のときを考えます。

$$(x+1)^p = 2 \cdot {}_p C_1 + 2^2 \cdot {}_p C_2 + \dots + 2^{p-1} \cdot {}_p C_{p-1} + 2^p + 1$$

(ii) より、 ${}_p C_r$ は p で割り切れるので、

$$2 \cdot {}_p C_1 + 2^2 \cdot {}_p C_2 + \dots + 2^{p-1} \cdot {}_p C_{p-1} + 2^p + 1$$

の青字の部分は p で割り切れるため、残りの $2^p + 1$ について注目することになります。

つまり 3^p を p で割った余りを考えるときは、のこった $2^p + 1$ を p で割った余りを考えればよいということになります。

(iii) より、 2^p を p で割った余りは 2 なので、

$2^p + 1$ を p で割った余りは $2 + 1 = 3$ とわかります。

$p \geq 5$ は (iii) を使うための条件である「 p は 3 以上の素数」を満たしているという確認です。

ポイント

本問は、誘導に乗っていけるかがポイントです。

小問がいくつかある場合誘導になっている可能性が高いので、どうにか利用できないか考えてみましょう。

特に今回のように「素数」など共通項があったり、導出する式の形が似ていたりする場合は、どのような式変形や工夫をすれば応用できるかを意識しながら解くことが大切です。