Q.（標準問題精講３　例題 25）
解説の補助をお願いします。

A.
(1) 正しい
これが正しいことは直感的には明らかですね。次にこれが正しいことを証明していきます。
(証明)
証明には平均値の定理を用います。
$a \leqq x_1 < x_2 \leqq b$
となる任意の x_1, x_2 を置きます。
平均値の定理より、

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=f'(c),\ x_1<c<x_2$$

を満たす c が存在する。
x_1, x_2 は区間 I にあり、区間 I では常に $f'(x)>0$ であることから、$f'(c)>0$ が成り立ち、
また $x_2-x_1>0$ であるから、

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}>0$$

$f(x_2)-f(x_1)>0$
$f(x_2)>f(x_1)$
これが区間 I の任意の x_1, x_2 に対して成り立つことが示されたので、
f(x)は I で増加することが示された。

証明を覚える上で、自分で 3 つの文字を置かなくてはいけないところが難しいと思いますが平均値の定理を用いることと、最終的に任意の x1,x2 に対して $f(x_2)>f(x_1)$ が成り立つことを示せばよいことを理解することが大事です。

(2)誤り
命題が間違っていることを示すには 1 つ反例を上げればよい。
(反例)
$x_1<x_2$ のとき、$x_1^3<x_2^3$ であるので、
$f(x)=x^3$ は増加するが、$f'(0)=0$ である。

$f(x)=x^3$ は $f'(0)=0$ であっても、$x=0$ は極値ではない
ということが反例などでよく用いられます。

(3)正しい

(証明)

(1) の証明において、f(‘c)>0 を f’(c)≧0 と修正すれば、

$f(x_1) \leqq f(x_2)$

となり、示される。

(4)正しい

(1)と同様に平均値の定理を用いようとしても、区間 I のすべての x に関して、題意が成り立つことは示しづらいので、今度は微分の定義を用います。

(証明)

h>0 のとき、x+h≧x より、

f(x+h)≧f(x)　(f(x)は I で非減少)

$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \geqq 0$

f(x)は微分可能ゆえ、h→+0 とすると、

$f'(x)=\lim_{h\to+0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \geqq 0$

よって示された。