

Q. (標準問題精講数学Ⅲ p89 標問 38)

解答 6 行目 ( $0 < x < 2$  において考えれば十分である) と、次行の分子 ( $\sqrt{2x}\sqrt{(x-2)^2+1} \cdot (2-x)\sqrt{x^2+3}$ ) は、有理化するためにこのような操作をしたのでしょうか。

A.

「最短時間で到着する」という条件なので、所要時間を関数  $f(x)$  とおいてその最小値を調べます。関数の最大値最小値はどこの定義域をとるかによって変わってきます。今回は問題の設定から解答にあるグラフから考えて  $0 < x < 2$  という条件が出てきます。

次に関数  $f(x)$  の最小値を調べる上で必要なのが増減表で、関数の増減を調べるために導関数  $f'(x)$  が必要です。ただ微分しただけの形だと  $\sqrt{\quad}$  や分数が複雑で、ぱっと見て正負、増減がわかりにくいので、まず一つの分数に統一しようという発想になります。次に  $f'(x) = 0$  となる点を探しますが、このときに方程式が解きやすい形になるように有理化します。分子の表記についてですが、ご指摘のとおり有理化するとき都合がよいので、前後関係を入れ替えたり、 $(x-2)$  をあえて  $-(2-x)$  と表記したりしています。これは  $(\sqrt{p})^2 = |p|$  の性質によるものです。二乗してルートを外すときにルートの中身が正だと確認されていれば絶対値記号を付ける必要がなくなるため、前後を入れ替えたり先ほど出てきた  $0 < x < 2$  の条件を利用しています。