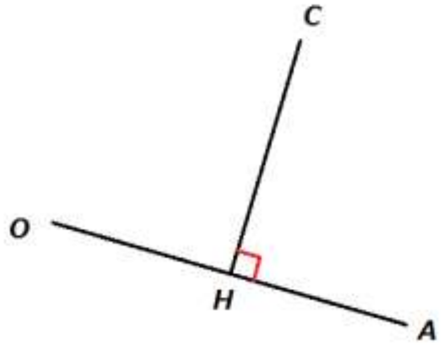
Q．（標準問題精講 2B P362 例題 163）
解説の補助をお願いします。
A．
直線や平面に下ろした垂線の足を、ベクトルを用いてどのように表すかを考えます。
まずは実際に例題を解いていきます。
(1)
点 H の位置ベクトル$\overrightarrow{OH}$を、$\vec{a},\vec{b},\vec{c}$を用いて表すにあたって、**点 H と直線 OA,OB,OC との位置関係を捉えることが重要です。**
まず、点 C、直線 OA、点 H の位置関係を図に表すと右のようになります。これより H に関して次のことが分かります。



①点 H は直線 OA 上にある
②直線 OA と直線 CH は直交している

この 2 つの情報を**それぞれベクトル方程式で表し、それらを連立させる**ことで$\overrightarrow{OH}$のベクトルを表します。

$$①\overrightarrow{OH}=k\overrightarrow{OA}\quad (k\text{は実数})$$
$$②\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{CH}=0$$

この 2 つのベクトル方程式を$\overrightarrow{OH}$について解きます。①式のkが分かればよいので、まずはkの値を求めます。
②を$\overrightarrow{OH}$についてまとめます。始点を O に揃えると、

$$\overrightarrow{OA}\cdot\left(\overrightarrow{OH}-\overrightarrow{OC}\right)=0$$

これに、①$\overrightarrow{OH}=k\overrightarrow{OA}$を代入して、

$$\overrightarrow{OA}\cdot\left(k\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OC}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow k\left|\overrightarrow{OA}\right|^2-\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}=0$$

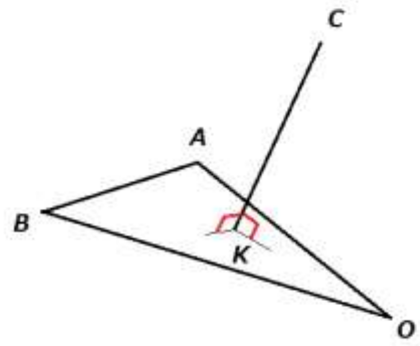
$$\Leftrightarrow k=\frac{\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}}{\left|\overrightarrow{OA}\right|^2}=\frac{\vec{a}\cdot\vec{c}}{|\vec{a}|^2}$$

これを①に代入して

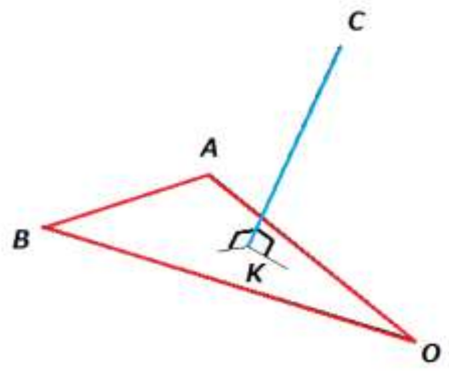
$$\overrightarrow{OH}=\frac{\vec{a}\cdot\vec{c}}{|\vec{a}|^2}\overrightarrow{OA}=\frac{\vec{a}\cdot\vec{c}}{|\vec{a}|^2}\vec{a}$$

(2)

考え方は(1)と同じで、まずは**点 K と直線 OA,OB,OC の位置関係を明らかにします。**



①点 K は平面 OAB 上にある
②直線 KC と平面 OAB は直交している



②のようにある直線が平面と直交するということはすなわち、**平面上にあるすべての直線と直交しています。**

直線 OA、OB は平面 OAB 上にあるので、KC⊥OA、KC⊥OB であると言えます。

したがって①②の情報をベクトル方程式で表すと以下のようになります。

①$\overrightarrow{OK} = m\overrightarrow{OA} + n\overrightarrow{OB}$($m,n$は実数)
②$\overrightarrow{KC} \cdot \overrightarrow{OA} = 0$, $\overrightarrow{KC} \cdot \overrightarrow{OB} = 0$

これらを連立し、$\overrightarrow{KC}$を求めます。まずはm,nを求めます。

①の$\overrightarrow{OK}$を$\overrightarrow{CK} - \overrightarrow{CO}$で書き換えます。

$$\overrightarrow{CK} - \overrightarrow{CO} = m\overrightarrow{OA} + n\overrightarrow{OB}$$
$$\Leftrightarrow \overrightarrow{CK} + \overrightarrow{OC} = m\overrightarrow{OA} + n\overrightarrow{OB}$$
$$\Leftrightarrow \overrightarrow{CK} = m\overrightarrow{OA} + n\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC}$$

これより$\overrightarrow{KC} = -\overrightarrow{CK} = -m\overrightarrow{OA} - n\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$ —①$'$

①$'$を②に代入すると、

$$(-m\overrightarrow{OA} - n\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}) \cdot \overrightarrow{OA} = 0$$
$$(-m\overrightarrow{OA} - n\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}) \cdot \overrightarrow{OB} = 0$$

ここで$\overrightarrow{OA} = \vec{a}, \overrightarrow{OB} = \vec{b}, \overrightarrow{OC} = \vec{c}$に書き換えると

$$\left(-m\vec{a}-n\vec{b}+\vec{c}\right)\cdot\vec{a}=0$$
$$\left(-m\vec{a}-n\vec{b}+\vec{c}\right)\cdot\vec{b}=0$$

それぞれ展開すると

$$-m|\vec{a}|^2-n\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{c}\cdot\vec{a}=0 \quad —②'$$

$$-m\vec{a}\cdot\vec{b}-n\left|\vec{b}\right|^2+\vec{b}\cdot\vec{c}=0 \quad —②''$$

ここで、$\vec{a}$と$\vec{b}$は直交しているので、$\boldsymbol{\vec{a}\cdot\vec{b}=0}$が成り立ちます。これを②$'$、②$''$に代入すると

$$②' \Leftrightarrow -m|\vec{a}|^2+\vec{c}\cdot\vec{a}=0 \quad \Leftrightarrow \quad m=\frac{\vec{c}\cdot\vec{a}}{|\vec{a}|^2}$$

$$②'' \Leftrightarrow -n\left|\vec{b}\right|^2+\vec{b}\cdot\vec{c}=0 \quad \Leftrightarrow \quad n=\frac{\vec{b}\cdot\vec{c}}{\left|\vec{b}\right|^2}$$

これでm,nを求められました、これを①$'$に代入します。

$$\overrightarrow{KC}=-m\vec{a}-n\vec{b}+\vec{c}$$

$$=-\frac{\vec{c}\cdot\vec{a}}{|\vec{a}|^2}\vec{a}-\frac{\vec{b}\cdot\vec{c}}{\left|\vec{b}\right|^2}\vec{b}+\vec{c}$$

平面においても空間においても、垂線の足をベクトルで考える場合は、**垂線の足がどのような場所にあるのか考えます。**具体的には、

①垂線の足がある直線上にある($\vec{○}=k\vec{\triangle}$)

②直交している(内積$=0$)

となります。これを**ベクトル方程式で連立させる**ことで求めるのがポイントです。