

Q. (標準問題精講 3 例題 23)

解説の補助をお願いします。

A.

(1) まずは連続であることの証明です。x=0 において連続であることを示すには

$$\lim_{x \rightarrow +0} f(x) = \lim_{x \rightarrow -0} f(x) = f(0)$$

を示す必要があります。

解答では+0 と-0 をひとくくりにしてまとめて解いていますがそれでも大丈夫です。

ここで $f(0)=0$ はすでに分かっているので、示すべき式は

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$$

となります。

ここで関数自体に注目すると $f(x)=x\sin 1/x$ とあります。このうち x は 0 にとんで、 $\sin 1/x$ は -1 から 1 の間を行ったり来たりします。そこで $\sin 1/x$ は常に 1 以下であると割り切って解答のように不等式を立てればはさみうちの定理から簡単に示すことができます。

(2) $g'(0)$ が存在することの一番簡単な証明方法は実際にその値を求めてしまうことです。なので定義に沿って求めてしまうことを考えましょう。式変形の際には (1) で用いた条件を用いることができます。

連続に関しては、実際に $g(x)$ を微分すると $\cos 1/x$ がでてきてしまい、 $\lim_{x \rightarrow +0} g'(x)$ が 0 にならないことに気付いたら証明終了です。