

Q. (数 2B 標準問題精講 P67 演習問題 28-2(2))

「 $g(0)=-3<0$ であるから $g(2)=2a+1\leq 0$ 」の部分が分かりません。

A. (2) の前半部分では、「四次方程式が $x>0$ で二つの実数解をもつような a の条件」を調べます。四次方程式だと扱いにくいので、慣れている二次方程式の解の配置問題に

持ち込むため、 $X=x+\frac{1}{x}$ と置き換えることで、(1) の誘導を利用します。

まず、

① (1) より $x>0$ のとき $X\geq 2$ であること

② X 一つに対して x は二つ (重解ならば一つ) 定まること

の二点から

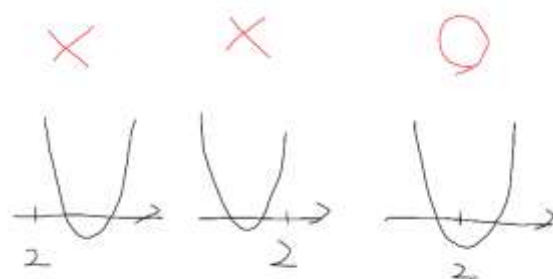
「 x についての四次方程式が $x>0$ で二つの実数解をもつ」

$\Leftrightarrow$ 「 X についての二次方程式が $X\geq 2$ で一つの実数解をもつ」

という関係にあることを確認してください。

解答のように $g(X)=X^2+aX-3$ とすると

「 X についての二次方程式が $X\geq 2$ で一つの実数解をもつ」ためには下に凸である $g(X)$ のグラフの形を考慮して



①

②

③

左図において、右端のグラフ③のようになっている必要があります。

ここで、軸や頂点を求めて解を配置していく解き方でもよいのですが、未知数 a が入ってきて面倒なので、まず $X=0$ を代入することで a の値によらず $X=0$ のときの $g(X)$ グラフの様子がわかります。 $g(0)<0$ より①の可能性が排除され、グラフは上の3パターンのうち②または③であることが保証されました。(※なお $g(0)<0$ より、 $g(X)$ グラフと X 軸の交点が二つあることもここでわかります。)

次に、②の可能性を排除してグラフを③型にしたいので、条件として $g(2)\leq 0$ ができます。

日本語がわかりにくいのですが、解答にある「 $g(0)=-3<0$ であるから $g(2)=2a+1\leq 0$ 」と

いう部分は、「 $g(0)=-3<0$ であるからすなわち $g(2)=2a+1\leq 0$ である」という意味ではなく、
「 $g(0)=-3<0$ であることが分かったから、条件を満たすには $g(2)=2a+1\leq 0$ であればよいの
で」という意味で解釈してください。