Q．（標準問題精講 2B　例題 78）
解説の補助をお願いします。（特に三角関数を含む不等式の解き方（最大値・最小値の求め方）について）

A．
(1)
sinx+cosy
三角関数の変数として、x と y の二種類の文字が登場しています。しかし、問題では定義域は y についてしか書いてありません。
この問題の方針として、x-y=$\frac{\pi}{4}$の式を使って、定義域の明記されていない x を消去し、y <u>一文字だけの関数</u>として解いていきます。また、角が揃ったあとは合成により cos または sin に<u>関数の型を統一する</u>ことも大切です。

一般的に、一つの式の中に二文字登場していたら関係式を使ってどちらか一文字を消去して解いていきます。このとき、不等式などの条件がわかっている方の文字（今回は y）を残してもう一方を消去すると簡単にできます。

x=$\frac{\pi}{4}+y$より
$\sin(\frac{\pi}{4}+y)$+cosy
加法定理↘
$=\sin\frac{\pi}{4}\cos y+\cos\frac{\pi}{4}\sin y+\cos y$

$=\frac{\sqrt{2}}{2}\cos y+\frac{\sqrt{2}}{2}siny+cosy$

$=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+1\right)\cos y+\frac{\sqrt{2}}{2}siny$

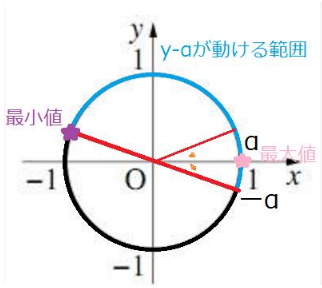
$=\frac{1}{\sqrt{2}}\{(1+\sqrt{2})cosy+siny\}$

cos で合成↘
$=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{4+2\sqrt{2}}\right)\{\cos(y-\alpha)\}$

$=\left(\sqrt{2+\sqrt{2}}\right)\cos(y-\alpha)$

ただし、α は $\cos\alpha=\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{4+2\sqrt{2}}}$ $\sin\alpha=\frac{1}{\sqrt{4+2\sqrt{2}}}$、$0<\alpha<\frac{\pi}{2}$　を満たすような定角

まず、$\cos(y-\alpha)$の値が知りたいので、αの範囲に加えて



0≦y≦πも合わせて考えて

-α≦y-α≦π-α

最小値：最小のy－α　　　最大値：最大のy－α

ここで、y-αは-αからπ進んだπ＋αまで動くから

単位円で表すと右のようになり

cos(π-α)≦cos(y-α)≦cos0

-cosα≦cos(y-α)≦1

$-\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{4+2\sqrt{2}}}$≦cos(y-α)≦1

$-\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}} \leqq \left(\sqrt{2+\sqrt{2}}\right)\cos(y-\alpha) \leqq \sqrt{2+\sqrt{2}}$

最大値$\sqrt{2+\sqrt{2}}$、最小値$-\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}}$

この問題のポイントは、最小に書いた文字の消去に加えて、yとαの範囲の条件から最大値最小値を正確に読み取ることです。

この問題に関しては、図のように単位円上で表すと間違えにくくなると思います。

（2）

こちらの問題では角はすべてθで揃っていますが、関数の型がcosとsinの両方あるのでどちらかに統一します。

特に、今回は2sinθcosθ、$\cos^2\theta$、$\sin^2\theta$の形があることから、二倍角2θを使って変形すれば扱いやすそうだと考えます。

$\cos^2\theta - 2\sin\theta\cos\theta + 3\sin^2\theta$

$= \frac{1+\cos 2\theta}{2} - \sin 2\theta + 3\frac{1-\cos 2\theta}{2}$

=2- sin2θ － cos2θ

=2-(sin2θ +cos2θ)

sinで合成↘

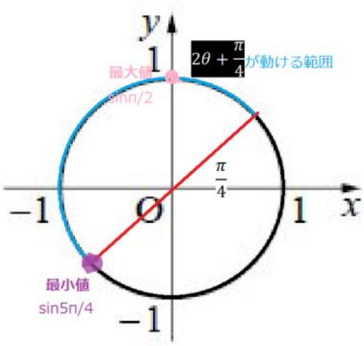
=2- $\sqrt{2}\sin\left(2\theta+\frac{\pi}{4}\right)$

$0 \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{2}$より

$0 \leqq 2\theta \leqq \pi$

$\frac{\pi}{4} = 0+\frac{\pi}{4} \leqq 2\theta+\frac{\pi}{4} \leqq \pi+\frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{4}$

$\frac{\pi}{4} \leqq 2\theta+\frac{\pi}{4} \leqq \frac{5\pi}{4}$



単位円より

$-\frac{1}{\sqrt{2}} \leqq \sin\left(2\theta+\frac{\pi}{4}\right) \leqq 1$であるから

$2-\sqrt{2}\cdot 1 \leqq 2-\sqrt{2}\sin\left(2\theta+\frac{\pi}{4}\right) \leqq 2-\sqrt{2}\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

$2-\sqrt{2} \leqq 2-\sqrt{2}\sin\left(2\theta+\frac{\pi}{4}\right) \leqq 3$

最大値3、最小値 $2-\sqrt{2}$

こちらのポイントは、まず二倍角に統一できるかどうかです。
三角関数が二次、三次（$2\sin\theta\cos\theta$、$\cos^2\theta$、$\sin^3\theta$ など）のときは、2 倍角,
3 倍角を使って式変形をして<u>三角関数の次数を下げる必要があります</u>。

例：$\cos^2\theta \Rightarrow \frac{1+\cos 2\theta}{2}$

[二次式]⇒[一次式]
[θ] ⇒[二倍角 2θ]

sin★、cos△、tan●のような形ならば、上のように単位円を使って不等式を解くことができますが二次以上の場合は単位円に持ち込めないので、このような処理が必要です。