

Q. (数学標問 2B 標問 116 の研究)

「左の端点において、片側からの微分係数しか存在しないし、つなぎ目の $a=1$ においては、 $f'(1)$ が存在するか未確認」という文について、①左の端点とはどこを指しているのでしょうか(右の端点は?) ②「 $a=1$ において $f'(1)$ が存在するか未確認」というのはどういうことでしょうか?

A. まず、微分可能(微分係数が定義できる)の条件は「その地点で関数が滑らかに連続している」というイメージをもってください。左右両方から近づいたときの微分係数が一致する必要があります。

式的な定義は

$\left[\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} \right]$ が存在するとき、関数 $f(x)$ は $x=a$ で微分可能」 です。

①

まず本問では $0 \leq a \leq 2$ の範囲で $f(a)$ について調べることが目的なので、 a についての関数 $f(a)$ のうち $0 \leq a \leq 2$ の範囲についてのみ考えます。

そのため、左の端点とは範囲の左端である $a=0$ 、右の端点は $a=2$ です。

「左の端点において、片側からの微分係数しか存在しない」というのは、 $a=0$ に右側から近づく ($a \rightarrow +0$) の片側微分係数しか存在せず、左側($a \rightarrow -0$)では片側微分係数が定義できないということです。これは、そもそも関数が 0 の左側および 2 の右側では定義されていないためです。

そもそも微分係数を定義するためには、少なくともその地点で関数が連続である必要があります、範囲の両端である $a=0, 2$ の二点で求められるのは微分係数ではなく片側微分係数です。

②

$f(a)$ は $a=1$ を境目として二つの関数をつなげたものであるため、ここでは関数が滑らかにつながっていません。そのため左右両方の片側微分係数が求められることまでしか確認できず、 $f'(1)$ が存在することまでは保証できません。

※【研究】にもあるように、片側微分係数どうしを二つの導関数それぞれに代入して知らべてみるとここではたまたま一致します。

(2) の最終目的は最大値を求めることです。そのために関数の増減の仕方を調べる必要があります、増減表を書くために微分という手順が必要になります。逆に言うと、関数の増減さえわかればよいので、 $a=0, 1, 2$ のように微分係数が定義されない点があっても値がどう変化するかがわかれば問題ないということです。