

Q. (標準問題精講 2B p. 285 例題 126)

解説の補助をお願いします。

A. 面積を求めるために曲線と放物線の交点を求めたいのですが、 a の値がまだ未知なので、具体的な値を出すことができません。そのため、交点の x 座標をとりあえず適当な文字でおきます。(解答では α 、 β を使っています。)

2つの部分の面積をそれぞれ S_1 、 S_2 とおくと、 $S_1 = S_2$ となりますが、それぞれの値を求めてからイコールで結ぶのはかなり手間がかかります。

そのため、 $S_1 - S_2 = 0$ を利用するために

$$S_1 - S_2 = \int_{\alpha}^{\beta} \{f(x) - g(x)\} dx = \int_{\alpha}^{\beta} 2(x - \alpha)x(x - \beta) dx \cdots \textcircled{1}$$

と計算することまではよいと思います。解答では、この次の式変形が難しいです。 $(x - \alpha)$ をひとかたまりとみて、 $(x - \alpha)$ ごと積分をしています。何も知らないでこの式変形をすることは不可能だと思うので、今回は、このようなやり方がある、と知る程度で良いと思います。

このような式変形をしない、単純な $\textcircled{1}$ の計算を以下のようにになります。

$$\begin{aligned} \textcircled{1} &= 2 \int_{\alpha}^{\beta} \{x^3 - (\alpha + \beta)x^2 + \alpha\beta x\} dx = 2 \left[\frac{x^4}{4} - \frac{(\alpha + \beta)x^3}{3} + \frac{\alpha\beta x^2}{2} \right]_{\alpha}^{\beta} = \frac{\beta^4 - \alpha^4}{2} - \frac{2(\alpha + \beta)(\beta^3 - \alpha^3)}{3} + \alpha\beta(\beta^2 - \alpha^2) = \\ &\frac{(\beta^2 - \alpha^2)(\beta^2 + \alpha^2)}{2} - \frac{2(\beta^2 - \alpha^2)(\beta^2 + 3\alpha\beta + \alpha^2)}{3} + \alpha\beta(\beta^2 - \alpha^2) = \dots \end{aligned}$$

このように、計算が非常にやっかいになるので、計算ミスに気を付けてください。