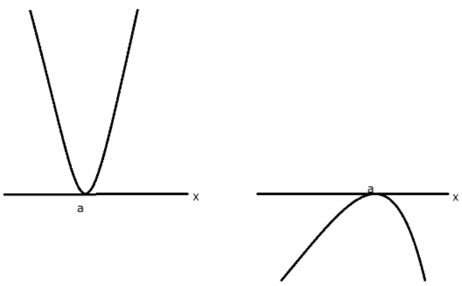
Q．（標準問題精講 2B　例題 96）
解説の補助をお願いします。（特に重解を持つ条件を式に直すところ）

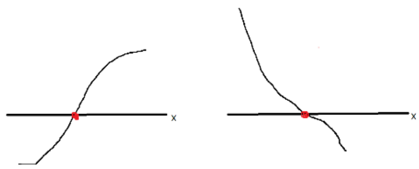
A．（１）の〈解答〉６行目から、重解をもつ条件を式に直していくところの過程について説明します。

「$f(x)=0$ が $x=a$ 重解をもつ」⇔「$f(a)=f'(a)=0$」ことを利用するのですが、これの正式な証明については標準問題精講 2B p.215 標問 94(1)を見てください。

ここでは、感覚的に説明したいと思います。
$g(x)=f(x)-mx-n$　とおいたとき、
「$f(x)-mx-n=0$ が $x=a$ となる重解をもつ」ことより、
a はこの方程式の解なので $g(a)=f(a)-mx-n=0$ が成り立つため $g(a)=0$ となります。
また、$x=a$ は**重解**であるので、$y=g(x)$のグラフと x 軸($y=0$)との関係を考えるとき
$x=a$ 付近では次の図のどちらかのような形になっているはずです。



※重解でない解の場合



←図１
☝どちらの場合でも $x=a$ で極値になるので $g'(a)=0$ となります。

よって
「$f(x)-mx-n=0$ が $x=a$ となる重解をもつ」⇒「$g(a)=0$ かつ $g'(a)=0$」が言えました。

逆向きの⇐の証明ですが、これも先ほどのグラフの図を利用します。
「$g(a)=0$ かつ $g'(a)=0$」のとき、グラフは図１のようになるので「$g(x)=f(x)-mx-n=0$ が $x=a$ となる重解をもつ」と言えます。
※$g'(a)=0$ だからといって必ずしも $x=a$ で極値をとるわけではないのですが、ここでは図１のようになる場合で考えます。（正式な方は標問９４を参照してください。）

よって⇒も⇐も言えたので、「$f(x)-mx-n=0$ が $x=a$ となる重解をもつ」⇔「$g(a)=0$ かつ $g'(a)=0$」が言えました。

重解はよく使う条件でもあるので、すぐに条件式に直せるようにしておきましょう。
きちんと証明するには標問９４のように因数定理と微分を使いますが、ただ覚えて使うだけでよいのであれば先述したグラフのイメージを持っておくのもよいと思います。