Ｑ．（標準問題精講 2B 例題 103）
解説の補助をお願いします。

Ａ．
⑴今回 x=α で極大 x=β で極小となる時、考えられる条件は
f'(α)=0,f"(α)<0
f'(β)=0,f"(β)>0 があげられる。
今回 f(x)が複雑なのでそのままα、βを代入して問題は複雑になるだけである。次数が高いときや、複雑な式を簡略化するときに使うやり方として、g(n)=r とわかっているときに
f(x)=h(x)g(x)+m(x)=rh(x)+m(x)、f(n)=h(n)g(n)+m(n)=rh(n)+m(n)となり簡略化するより方がある。今回の問題 g(n)=f'(α, β),r=0 である。r=0 のとき h(n)についても無視できるのでもっと簡略化できる。問題を見て注意するのは g(n)=r という条件があるとき、f(x)を g(x)で割ってみるということである。
今回の問題では f(x)を f'(x)で割って考えると、f(x)=$\frac{(x+p)}{3}$f'(x)+2(q-p^2)x+r-pq とおける。
f'(α),f'(β)=0 の条件を使うと、f(α)=2(q-p^2)$\beta+\gamma$-pq、
f(β)=2(q-p^2)$\beta+\gamma$-pq となる。f(α)+f(β)＝2(q-p^2)($\alpha+\beta$)+2(γ-pq)
ここで$\alpha+\beta$が残ってしまったが、これは f'(α),f'(β)=0 に注目し、f'(x)について解と係数の関係を用いて$\alpha+\beta$=-2p となる。f(α)+f(β)=$4p^3-6pq+2\gamma$となる。

⑵中点 M は($\frac{\alpha+\beta}{2}$,$\frac{f(\alpha)+f(\beta)}{2}$)となる。⑴でより$\frac{\alpha+\beta}{2}=-p$,$\frac{f(\alpha)+f(\beta)}{2}$=$2p^3-3pq+\gamma$となる。
f(-p)= $2p^3-3pq+\gamma$となるので、中点 M はこの曲線上にある。