

Q. (標準問題精講 II B 例題 36)

解説の補助をお願いします。

A.

(1) $\triangle OAB$ の面積を半分にするということは $\triangle OPQ = \frac{1}{2} \triangle OAB$ ということである。

$\triangle OAB = \frac{1}{2} OA \times OB \times \sin \theta$ である。 $\triangle OPQ = \frac{1}{2} OP \times OQ \times \sin \theta$ である。よって $OA \times OB \times \frac{1}{2} = OP \times OQ$ となる。 $OA = 2\sqrt{13}$ 、 $OB = 2\sqrt{37}$ 、 $OP = \frac{4}{3}\sqrt{37}$ 代入すると $OQ = \frac{3}{2}\sqrt{13}$ となる。

$OQ = (4t, 6t)$ とおいてやると $t = \frac{3}{4}$ だとわかり、 Q は $(3, \frac{9}{2})$ とわかる。標問の解答のように比でやる方が楽だが、分かりにくいという場合にはこのようにやればよい。

(2) 重心 G の座標は $(\frac{16}{3}, \frac{8}{3})$ となる。ここで、 PG についてだが、 R の座標を求める時 2 通りある。1 つは PG の直線を求め OA との接点を求めるやり方、2 つめが $R = (4n, 6n)$ と

して R, P, G が直線となる条件を考える。2 つ目のやり方について解説しておく。このとき $\overrightarrow{OG} = a\overrightarrow{OR} + (1-a)\overrightarrow{OP}$ と置けるということである。すると $\frac{16}{3} = a \times 4n + (1-a) \times 8$ 、 $\frac{8}{3} = a \times 6n + (1-a) \times \frac{4}{3}$ これを解くと $R = (\frac{8}{3}, 4)$ となる。これが出ると $\triangle OPR = \frac{1}{2} OP \times OR = \frac{1}{2} |8 \times 4 - \frac{4}{3} \times \frac{8}{3}| = \frac{128}{9}$ となる。 $\triangle OAB, A = (x_1, y_1), B = (x_2, y_2)$ とする時、 $\triangle OAB = \frac{1}{2} |x_1 y_2 - x_2 y_1|$ という公式は定石なので、覚えておく。公式を使って同様に計算すると、

$\triangle PQR = \triangle OPQ - \triangle OPR = \frac{1}{2} \triangle OAB - \triangle OPR = \frac{16}{9}$ となる。