

Q. (標準問題精講 3 例題 37)

解説の補助をお願いします。

A.

この問題は一度解いたことがないと難しいかもしれません。

(1) AB を求めろとあるので B の座標を求めたあとに AB² を求めます。

このとき $f(t)^2 - f'(t)^2 = 1$ の関係式は知っているのと速く解けますが、知らなくてもその場で計算して $\sqrt{\quad}$ を外すことは十分できます。大切なのは、解いて $\sqrt{\quad}$ が外れたときに $f(t)^2 - f'(t)^2 = 1$ を関係式としてとらえることです。これを関係式としてみてないと (2) で大変な計算をすることになってしまいます。

(2) 要は AB を微分してくださいということです。

そのまま計算してしますとえらく時間がかかってしまい到底無理でしょう。

そこで (1) の計算で $f(t)^2 - f'(t)^2 = 1$ を関係式として意識していると、 $f'(t)$ にそろえようという発想がうまれ

$$AB = \frac{f'(t)^2 + 1}{f'(t)}$$

を微分すれば最小値が求まるのかと考えることができます。

このままだとやりづらいので別の文字に置き換えてから微分するとよいでしょう。

ただ、実は今回は微分する必要はありません。なぜなら

$$AB = f'(t) + \frac{1}{f'(t)}$$

と変形すると見たことのある形になります。実は相加平均相乗平均の関係を使うことができます。するとあっという間に最小値を求めることができます。

この形は案外よく出てくるので、すぐに微分にとびついてしまうのではなく、一瞬でもいいので他の方法で出来ないかな？と考えるといいと思います。