

Q. (標準問題精講 2B P360 例題 162)

解説の補助をお願いします。

A.

※この解説においては点 P が動点で、その他は定点であることに注意してください。

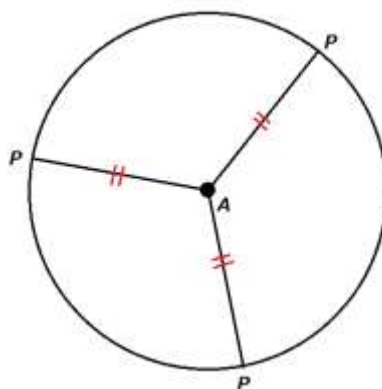
円のベクトル方程式には主に以下の①、②のタイプの表記がよく現れます。

① $|\vec{p} - \vec{a}| = r$

これを書き換えると

$$|\overrightarrow{AP}| = r$$

となり、点 A と点 P を結ぶ線分の距離が r で一定であるという意味です。つまり、点 P が点 A と距離 r を保ちながら動くので、点 P は点 A を中心とする半径 r の円を描きます。

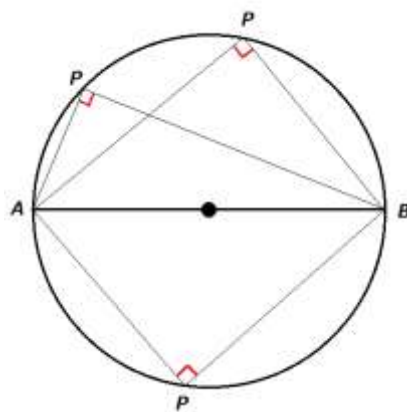


② $(\vec{p} - \vec{a}) \cdot (\vec{p} - \vec{b}) = 0$

これを書き換えると

$$\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{BP} = 0$$

となり、線分 AP と線分 BP が直交しているという意味です。つまり、点 P が $\angle APB = 90^\circ$ を保ちながら動くので、点 P は線分 AB を直径とする円を描きます。



この 2 つの形式が出たら、すぐに円のベクトル方程式であると気づけるようにしておきましょう。

ベクトル方程式では、まず与えられた方程式を動点(本問では点 P)についてまとめるように変形し、直線のベクトル方程式や円のベクトル方程式のどのタイプに当てはまるかを判断します。

式変形でよく使われるのが、ベクトルの始点を揃える、方程式の両辺を 2 乗するという手法です。

$$(1) |\vec{AP} + \vec{BP} + \vec{CP}| = 3$$

ベクトルの始点を点 O に揃えます。

$$|(\vec{OP} - \vec{OA}) + (\vec{OP} - \vec{OB}) + (\vec{OP} - \vec{OC})| = 3$$

$\vec{OP}$ とそれ以外に分けます。

$$|3\vec{OP} - (\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC})| = 3$$

左辺を 3 でくくります。

$$3 \left| \vec{OP} - \frac{\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC}}{3} \right| = 3$$

ここで、 $\frac{\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC}}{3}$ は $\triangle ABC$ の重心です。重心を G とすると、

$$\frac{\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC}}{3} = \vec{OG}$$

ですから、方程式は

$$3|\vec{OP} - \vec{OG}| = 3$$

両辺を 3 で割って

$$|\vec{OP} - \vec{OG}| = 1$$

これは①のタイプに当てはまります。したがって点 P は点 $G(\triangle ABC$ の重心)を中心とする、半径 1 の円を描きます。

$$(2) |\vec{AP} + \vec{BP}| = |\vec{AB}|$$

これも(1)同様に点 P についてまとめるように変形します。左辺のベクトルの始点を O に揃えると

$$\begin{aligned} |(\vec{OP} - \vec{OA}) + (\vec{OP} - \vec{OB})| &= |\vec{AB}| \\ |2\vec{OP} - (\vec{OA} + \vec{OB})| &= |\vec{AB}| \end{aligned}$$

両辺を 2 で割ると

$$\left| \vec{OP} - \frac{\vec{OA} + \vec{OB}}{2} \right| = \frac{|\vec{AB}|}{2}$$

ここで、 $\frac{\vec{OA} + \vec{OB}}{2}$ は線分 AB の中点です。これを M とすると、

$$\frac{\vec{OA} + \vec{OB}}{2} = \vec{OM}$$

ですから、方程式は

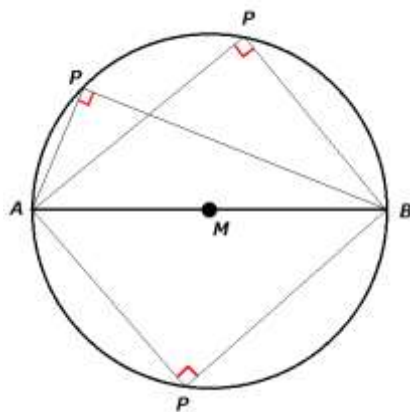
$$|\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OM}| = \frac{|\overrightarrow{AB}|}{2}$$

右辺の $|\overrightarrow{AB}|$ は点 A も点 B も定点なので、一定の値です。

するとこの方程式の形式は①のタイプに当てはまります。従って点 P は点 M(線分 AB の中点)

を中心とする、半径 $\frac{|\overrightarrow{AB}|}{2}$ の円を描きます。これを

図に描くと右のようになります。これをまとめると、点 P は線分 AB を直径とする円を描きます。



【参考】

答えから、常に $\angle APB = 90^\circ$ であることが分かるので、②のタイプにしたがえば

$$\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{BP} = 0$$

と書き換えることも出来るはずです。実際に試してみましょう、

$$|\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{BP}| = |\overrightarrow{AB}|$$

始点を全て A に揃えます。

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{AP} + (\overrightarrow{AP} - \overrightarrow{AB})| &= |\overrightarrow{AB}| \\ \Leftrightarrow |2\overrightarrow{AP} - \overrightarrow{AB}| &= |\overrightarrow{AB}| \end{aligned}$$

両辺を 2 乗します。

$$|2\overrightarrow{AP} - \overrightarrow{AB}|^2 = |\overrightarrow{AB}|^2$$

展開します。

$$4|\overrightarrow{AP}|^2 - 4\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AB} + |\overrightarrow{AB}|^2 = |\overrightarrow{AB}|^2$$

$$\Leftrightarrow 4|\overrightarrow{AP}|^2 - 4\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$$

左辺を $\overrightarrow{AP}$ でくくります。

$$4\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AP} - 4\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$$

$$\Leftrightarrow 4\overrightarrow{AP} \cdot (\overrightarrow{AP} - \overrightarrow{AB}) = 0$$

$$\Leftrightarrow 4\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{BP} = 0$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{BP} = 0$$

このように変形していても、点 P は線分 AB を直径とする円を描くことが分かります。

【参考】はテクニック的にひらめくことが難しいので、基本的には(1)のような手法で解けることが重要ですが、【参考】のような変形もあることを頭に入れておきましょう。

いずれにせよ、ベクトルの始点を揃えるというテクニックは重要です。

$$(3) \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} \cos \theta + \overrightarrow{OB} \sin \theta \quad (0^\circ \leq \theta \leq 360^\circ)$$

ただし、問題の条件より $|\overrightarrow{OA}| = |\overrightarrow{OB}| = r$ 、 $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = 0$ ($\leftarrow \overrightarrow{OA}$ と $\overrightarrow{OB}$ が直角だから)

両辺を 2 乗します。

$$|\overrightarrow{OP}|^2 = |\overrightarrow{OA} \cos \theta + \overrightarrow{OB} \sin \theta|^2$$

$$\Leftrightarrow |\overrightarrow{OP}|^2 = |\overrightarrow{OA}|^2 \cos^2 \theta + 2\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} \cos \theta \sin \theta + |\overrightarrow{OB}|^2 \sin^2 \theta$$

$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = 0$ なので

$$|\overrightarrow{OP}|^2 = |\overrightarrow{OA}|^2 \cos^2 \theta + 0 + |\overrightarrow{OB}|^2 \sin^2 \theta$$

$|\overrightarrow{OA}| = |\overrightarrow{OB}| = r$ を代入します。

$$|\overrightarrow{OP}|^2 = r^2 \cos^2 \theta + r^2 \sin^2 \theta$$

$$\Leftrightarrow |\overrightarrow{OP}|^2 = r^2 (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta)$$

$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ なので

$$|\overrightarrow{OP}|^2 = r^2 \cdot 1$$

$$\Leftrightarrow |\overrightarrow{OP}|^2 = r^2$$

$$\Leftrightarrow |\overrightarrow{OP}| = r$$

これは点 O と点 P が距離 r を保ちながら動くということなので、①のタイプに当てはまります。したがって点 P は平面 OAB 上で、点 O を中心とする、半径 r の円を描きます。

以上のように、ベクトルの始点を揃えることで動点(本問では点 P)を一つにまとめることができます。また方程式を 2 乗することでベクトルの長さの条件や内積の条件を利用することができます。

以上から、「ベクトル方程式が与えられていて、動点はどのような図形を描くか？」という問題が出題されたときは、ベクトルの始点を揃えたり、方程式を 2 乗するなどして、直線あるいは円のベクトル方程式の形式に変形することがポイントです。