

Q. (標準問題精講 3 p. 110 例題 47)

解説の補助をお願いします。

A. (1) 接線の式をつくって、 $x_n$ と $x_{n+1}$  の関係を求めるだけの、非常に基本的な問題です。

(2) 普通に $x_n$ の値を求めることはできません。そこで、 $x_1 > 2$ という初期条件 ( $n=1$ のときの条件) が与えられていることと、(1) で $x_n$ と $x_{n+1}$  の関係が分かっていることから、数学的帰納法を使って解こうと考えられると思います。この方法が思いつけば、(2) も非常に簡単に証明ができます。

(3) このような、数列がある定数に収束することを示す問題では、解答のような解き方で解くことが多いです。

数列の関係式が与えられていて (今回は (1) で関係式を求めている)、 $x_n$ がある数 $\alpha$ に収束することを証明するときは、 $x_n - \alpha$ を数列の関係式を何度も使うことでうまくはさみうちします。

この問題では、②から③によって $x_{n+1} - \sqrt{2} < \frac{1}{2}(x_n - \sqrt{2})$ を導くのがやや難しいと思いますが、 $x_n - \sqrt{2}$ が0に収束するようなものではさむことを考えて、式を変形していきます。

このような問題はよく出るので、解法を覚えておきましょう。