

Q. (標準問題精講 2B 例題 25)

解説の補助をお願いします。

A.

このような問題は $y=x^2-2ax+b$ とおいて $y=0$ と交わる点を考えることが定石である。この問題で大切なのは場合分けである。とりあえず a, b がどう変化するかでグラフがどのように変わるかを見ていかなければならない。 $x=a$ で軸であることを捉え、また、軸上の y 座標がどのような値なのか注目して場合分けしなければならない。

頂点が正の場合必ず $y=0$ は通らないので、必ず頂点は負である。頂点を負だとして大まかに場合分けを考えていくと、 $a < 0$ において 2 点は通れないので、p60 の i の図のように 1 点で交わる。 $0 \leq a \leq 1$ の範囲が ii の図であり、ここでポイントなのがこの時 1 点で交わるのか 2 点で交わるのか、1 点で交わる時 $x=0$ と 1 どちらが正でどちらが負なのかという違いを考えることである。 $a < 1$ においては iii を参考にしてももちろん 2 点で交わることはできないので、1 点で交わることを考える。

i の時 $a < 0$ で $x=1$ が正 $x=0$ が負であるという条件を考えると、 $2a-1 \leq b \leq 0$ となる。

ii の時 $0 \leq a \leq 1$ で $x=0, x=1$ でどちらかが正どちらかが負であればよく、この条件が $b \times (1-2a+b) \leq 0$ である。また、2 点で交わる時についても考えると、これは頂点の y 座標が負つまり $\frac{D}{4} = a^2 - b \geq 0$ が成り立ちまた、 $x=0$ も $x=1$ も正であることより、 $b \geq 0, 1 - 2a + b \geq 0$ となる。

iii の時 $a > 1$ であり、 $x=0$ で正 $x=1$ で負となる。これらの条件をつなぐことで解が求まる。