

Q. (標準問題精講 2B 例題 81)

解説の補助をお願いします。(特に、式変形について)

A.

(1)与えられた式の左辺は足し算、右辺は0になっています。三角関数が0になるときは条件が限られるので、左辺を三角関数の掛け算にして、**三角関数の掛け算=0**のような形にもっていけば答えは出そうだと考えて和積の公式を用います。

$$\sin 4A + \sin 4B + \sin 4C$$

$$= 2\sin 2(A+B)\cos 2(A-B) + 2\sin 2C\cos 2C$$

( $\sin 4A + \sin 4B$  に対しては和積の公式、 $\sin 4C$  に対しては2倍角の公式を用いた。)

$$= -2\sin 2C\cos 2(A-B) + 2\sin 2C\cos 2C$$

( $2(A+B) = 2(180^\circ - C) = 360^\circ - 2C$  より、 $\sin 4A = \sin(-2C) = -\sin 2C$  を用いた。)

$$= 2\sin 2C\{\cos 2C - \cos 2(A-B)\}$$

$$= 2\sin 2C(-2)\sin(C+A-B)\sin(C-A+B)$$

( $\cos 2C - \cos 2(A-B)$  に和積の公式を用いた。)

$$= -4\sin 2A\sin 2B\sin 2C$$

( $C+A-B = 180^\circ - 2B$  より、 $\sin(C+A-B) = \sin(180^\circ - 2B)$ )

( $C-A+B = 180^\circ - 2A$  より、 $\sin(C-A+B) = \sin(180^\circ - 2A)$ )

ここが難しいですね。 $180^\circ = A+B+C$  を利用しています。

以上の式変形によって三角関数の掛け算=0の形になりました。

$$\sin 2A\sin 2B\sin 2C = 0$$

$0 < 2A, 2B, 2C < 360^\circ$  より、

$$2A = 180^\circ \text{ または } 2B = 180^\circ \text{ または } 2C = 180^\circ$$

$$A = 90^\circ \text{ または } B = 90^\circ \text{ または } C = 90^\circ$$

よって**三角形 ABC は直角三角形**

(2)こちらも(1)と同様に左辺—右辺を三角関数の掛け算にして、**三角関数の掛け算=0**の形を作ることを狙っていきます。

左辺—右辺

$$= 2\sin \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2} - 2\sin \frac{C+D}{2} \cos \frac{C-D}{2}$$

(左辺、右辺それぞれに和積の公式を用いた。)

$$= 2\sin \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2} - 2\sin \frac{A+B}{2} \cos \frac{C-D}{2}$$

( $\sin \frac{C+D}{2} = \sin(360^\circ - \frac{A+B}{2}) = \sin \frac{A+B}{2}$  を用いた。)

$$= 2\sin \frac{A+B}{2} (\cos \frac{A-B}{2} - \cos \frac{C-D}{2})$$

$$= 2\sin \frac{A+B}{2} (-2)\sin \frac{A-B+C-D}{4} \sin \frac{A-B-C+D}{4}$$

(和積の公式を用いた。)

ここで、 $0^\circ < A+B < 360^\circ$

$0^\circ < A+B < 180^\circ$  より、

$$\sin \frac{A+B}{2} \neq 0$$

であるから、

(左辺-右辺)=0

$$\sin \frac{A-B+C-D}{4} \sin \frac{A-B-C+D}{4} = 0$$

$-90^\circ < \frac{A-B+C-D}{4}, \frac{A-B-C+D}{4} < 90^\circ$  より、

$$\frac{A-B+C-D}{4} = 0^\circ \text{ または、 } \frac{A-B-C+D}{4} = 0^\circ$$

$A+C=B+D=180^\circ$  または、 $A+D=B+C=180^\circ$  ( $360^\circ / 2$ )

よって四角形 ABCD は、

円に内接する四角形または、AB と CD が平行な台形