

Q. (標準問題精講数3 P238 演習 103 (研究 101、103))

一次変換と非調和比の保存の意味がよく分かりません。研究 101 の P232 の一番下の式は、④を何で割っているのですか？解答では、なぜ 0,1,2 に移そうとしているのですか？

A.

まず非調和比の保存について説明します。非調和比とは、標問 103 にある λ のことを指し、4 つの複素数から求められる値

$$\lambda = \frac{(z_1 - z_3)(z_2 - z_4)}{(z_1 - z_4)(z_2 - z_3)}$$

です。 z_1 から z_4 の 4 つの値が決まれば求められる値なので、

$$\lambda = (z_1, z_2, z_3, z_4)$$

と表します。

z_1 から z_4 に対してそれぞれ一次変換 f をほどこすと、それぞれ $f(z_1), f(z_2), f(z_3), f(z_4)$ に移ります。したがって一次変換をした後の非調和比は、

$$(f(z_1), f(z_2), f(z_3), f(z_4))$$

と書けます。これが一次変換前の非調和比と同じであること、つまり

$$(z_1, z_2, z_3, z_4) = (f(z_1), f(z_2), f(z_3), f(z_4))$$

であることが非調和比の保存です。本当に保存されているのか、確かめてみましょう。

研究 101 にならって一次変換 f を

$$f(z) = \frac{az + b}{cz + d}$$

と表し、実際に $(az + b) \div (cz + d)$ を計算します。

$$f(z) = \frac{az + b}{cz + d} = \frac{az}{cz + d} + \frac{b}{cz + d} \quad \leftarrow \text{分子を分解しました}$$

$$= \frac{\frac{a}{c}(cz + d - d)}{cz + d} + \frac{b}{cz + d} \quad \leftarrow cz + d \text{ の形を作るために赤字の操作をしました。}$$

$$= \frac{\frac{a}{c}(cz + d)}{cz + d} + \frac{-\frac{ad}{c} + b}{cz + d} \quad \leftarrow \text{上の } -d \text{ を右に分けました。}$$

$$= \frac{a}{c} + \frac{-\frac{ad}{c} + b}{cz + d} \quad \leftarrow \text{左の項を } cz + d \text{ で約分しました。}$$

$$= \frac{a}{c} + \frac{bc - ad}{c(cz + d)} \quad \leftarrow \text{右の項の分子分母に} c \text{をかけました。}$$

$$= \frac{a}{c} + \frac{bc - ad}{c^2 \left(z + \frac{d}{c} \right)} \quad \leftarrow \text{右の項の分母を} c^2 \text{でくくりました。}$$

したがって、

$$f(z) = \frac{az + b}{cz + d} = \frac{a}{c} + \frac{bc - ad}{c^2 \left(z + \frac{d}{c} \right)}$$

となっています。この一次変換 f によって z がどのように変換されるのか見てみましょう。

a, b, c, d はいずれも定数であるので、

$$\frac{bc - ad}{c^2} = \frac{1}{k}, \quad \frac{d}{c} = \beta$$

$(k, \beta: \text{複素数})$ と文字をおくと、

$$f(z) = \frac{a}{c} + \frac{1}{k(z + \beta)}$$

となります。これによって

- 1) $z \rightarrow z + \beta$ (平行移動)
- 2) $z + \beta \rightarrow k(z + \beta)$ (回転と拡大・縮小の合成)
- 3) $k(z + \beta) \rightarrow \frac{1}{k(z + \beta)}$

という 1)～3) の変換が、 f によって一度になされていることが分かります(テキストでは 1)～3) の変換が合成されていると言っています)。

では 1)～3) の変換を行ったときの非調和比 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ がどうなるか見てみましょう。

1) の場合

$$\lambda_1 = (z_1 + \beta, z_2 + \beta, z_3 + \beta, z_4 + \beta)$$

見やすさのために、

$$= (z'_1, z'_2, z'_3, z'_4) \text{ と置くことにします。すると}$$

$$= \frac{(z'_1 - z'_3)(z'_2 - z'_4)}{(z'_1 - z'_4)(z'_2 - z'_3)} \quad \leftarrow \text{非調和比の式に代入します。}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\{(z_1 + \beta) - (z_3 + \beta)\}\{(z_2 + \beta) - (z_4 + \beta)\}}{\{(z_1 + \beta) - (z_4 + \beta)\}\{(z_2 + \beta) - (z_3 + \beta)\}} \quad \leftarrow z' \text{を元に戻します。} \\
&= \frac{(z_1 - z_3)(z_2 - z_4)}{(z_1 - z_4)(z_2 - z_3)} = \lambda \\
&\text{となつて、}\lambda_1 \text{は}\lambda \text{と同じです。}
\end{aligned}$$

2)の場合

ここでも、見やすさのために

$$\begin{aligned}
\lambda_2 &= (z_1'', z_2'', z_3'', z_4'') \text{と置きます。すると} \\
&= (kz_1', kz_2', kz_3', kz_4') \quad \leftarrow z + \beta = z' \text{としています。} \\
&= \frac{(kz_1' - kz_3')(kz_2' - kz_4')}{(kz_1' - kz_4')(kz_2' - kz_3')} \quad \leftarrow \text{非調和比の式に代入します。} \\
&= \frac{k(z_1' - z_3')k(z_2' - z_4')}{k(z_1' - z_4')k(z_2' - z_3')} \quad \leftarrow \text{各()内を}k\text{でくくりました。} \\
&= \frac{(z_1' - z_3')(z_2' - z_4')}{(z_1' - z_4')(z_2' - z_3')} = (z_1', z_2', z_3', z_4') = \lambda_1 \\
&\text{となつて、}\lambda_2 = \lambda_1 = \lambda \text{となります。}
\end{aligned}$$

3)の場合

$$\begin{aligned}
\lambda_3 &= \left(\frac{1}{z_1''}, \frac{1}{z_2''}, \frac{1}{z_3''}, \frac{1}{z_4''} \right) \quad \leftarrow k(z + \beta) = z'' \text{としています。} \\
&= \frac{\left(\frac{1}{z_1''} - \frac{1}{z_3''} \right) \left(\frac{1}{z_2''} - \frac{1}{z_4''} \right)}{\left(\frac{1}{z_1''} - \frac{1}{z_4''} \right) \left(\frac{1}{z_2''} - \frac{1}{z_3''} \right)} \quad \leftarrow \text{非調和比の式に代入します。} \\
&= \frac{\left(\frac{z_3'' - z_1''}{z_1'' z_3''} \right) \left(\frac{z_4'' - z_2''}{z_2'' z_4''} \right)}{\left(\frac{z_4'' - z_1''}{z_1'' z_4''} \right) \left(\frac{z_3'' - z_2''}{z_2'' z_3''} \right)} \quad \leftarrow \text{各()内を通分しました。} \\
&= \frac{\frac{(z_3'' - z_1'')(z_4'' - z_2'')}{z_1'' z_2'' z_3'' z_4''}}{\frac{(z_4'' - z_1'')(z_3'' - z_2'')}{z_1'' z_2'' z_3'' z_4''}} \\
&= \frac{(z_3'' - z_1'')(z_4'' - z_2'')}{(z_4'' - z_1'')(z_3'' - z_2'')} \quad \leftarrow \text{分子分母に}z_1'' z_2'' z_3'' z_4''\text{をかけました。}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\{-(z_1'' - z_3'')\}\{-(z_2'' - z_4'')\}}{\{-(z_1'' - z_4'')\}\{-(z_2'' - z_3'')\}} \quad \leftarrow \text{各()内を} -1 \text{ でくくりました。} \\
&= \frac{(z_1'' - z_3'')(z_2'' - z_4'')}{(z_1'' - z_4'')(z_2'' - z_3'')} = (z_1'', z_2'', z_3'', z_4'') = \lambda_2
\end{aligned}$$

以上より、 $\lambda_3 = \lambda_2 = \lambda_1 = \lambda$ となりました。

λ_3 は z を f で一次変換した後の非調和比ですから、結局

$$\lambda_3 = (f(z_1), f(z_2), f(z_3), f(z_4)) = (z_1, z_2, z_3, z_4) = \lambda$$

つまり、一次変換をほどこしても非調和比は一次変換前と同じ値であることが分かりました。テキストではこのことを「非調和比の保存」と言っています。

次に演習 103 の解説にうつります。

演習問題では、任意の直線 l 上にある複素数 z_1, z_2, z_3, z_4 の非調和比 $\lambda = (z_1, z_2, z_3, z_4)$ が実数であることを示すことになります。

ここで、上で述べた「①一次変換における非調和比の保存」と「②円々対応(一次変換は円を円に、直線を直線に移すという意味)であること」の2つを利用します。

①一次変換における非調和比の保存

任意の直線 l 上にある z_1, z_2, z_3, z をそれぞれ $0, 1, 2, w$ に移すような一次変換 f を考えます。このとき非調和比は、変換前と後で変わらない(非調和比の保存)ので

$$(z_1, z_2, z_3, z) = (0, 1, 2, w) \quad \text{---①}$$

という関係があります。

(z_1, z_2, z_3, z) の具体的な値は分かりませんが、 $(0, 1, 2, w)$ だったらある程度具体的な値が把握でき、①の関係から間接的に (z_1, z_2, z_3, z_4) が求められます。いま、実数であることを示したいため、非調和比が実数になるように $0, 1, 2$ に移したということです。

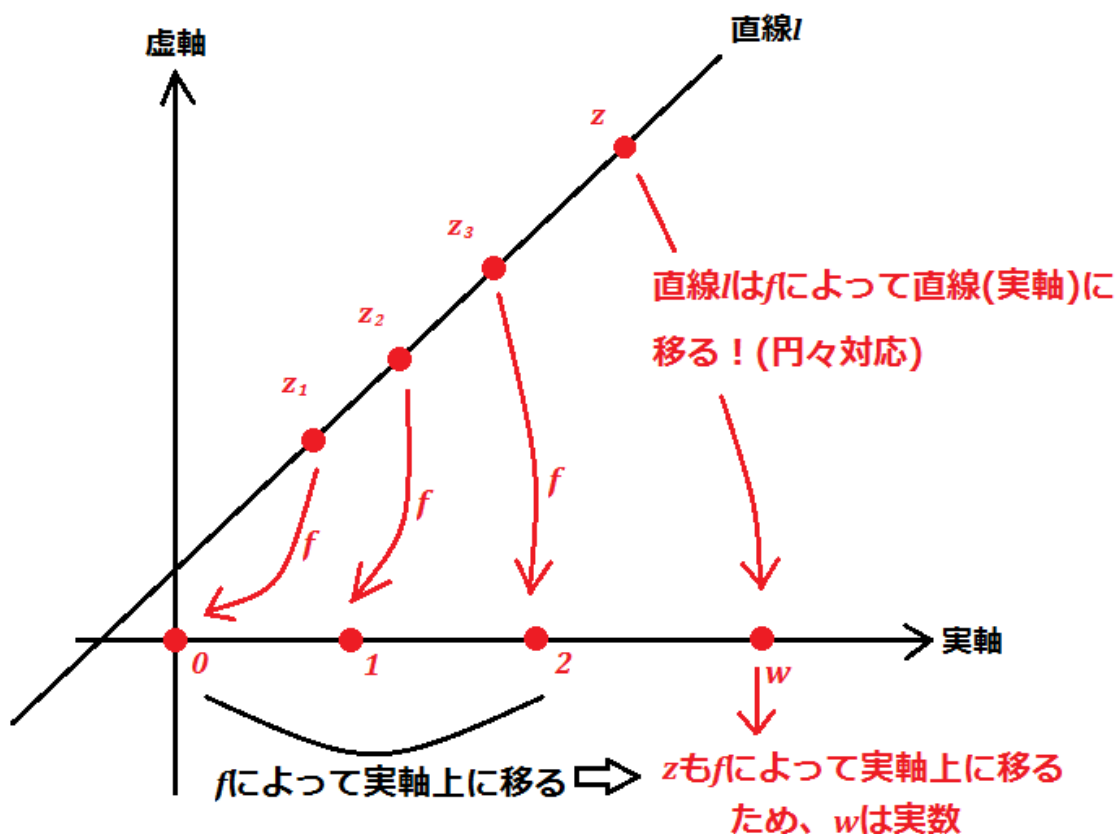
では、 $(0, 1, 2, w)$ を実際に求めてみましょう。

$$(0, 1, 2, w) = \frac{(0 - 2)(1 - w)}{(0 - w)(1 - 2)} = \frac{-2(1 - w)}{-w(1 - 2)} = \frac{2(w - 1)}{w}$$

もし w が実数であれば、非調和比 $(0,1,2,w)$ が実数と分かり、①の関係から (z_1, z_2, z_3, z) も実数であるため、題意が満たされます。

w が実数となることを示すために、円々対応を利用します。

②円々対応(一次変換によって円は円に、直線は直線に移る)



直線 l が $0,1,2$ (つまり実軸という直線)に移ると仮定しました。直線に対して一次変換を行うと、直線に移るので、直線 l 上の z も、実軸上に移ります。実軸上の値は実数なので、 w は実数であることが分かります。

これより、

$$(0,1,2,w) = \frac{2(w-1)}{w} = (\text{実数}) \quad \text{---②}$$

です。

以上より①②から、 $(z_1, z_2, z_3, z) = (0,1,2,w) = (\text{実数})$ が示せました。