Q．（標準問題精巧 2B p69 演習 29-3）
x にいきなり yi を代入する意味と、「a≠b であれば①を満たす実数 y は 2 個以下」という説明の意味がよく分かりません。

A．
yiが x についての方程式$x^5+x^4+ax^3+bx^2+cx+d=0$の解であるということは、yiを代入してもこの方程式が成り立つので、代入することができます。

ではなぜyiを代入するかというと、「相異なる純虚数の解を４つ」といっても、**虚数解をもつ条件**は表すのが難しいので、純虚数をyi（ｙは実数でｙ≠０）の形で代入することで、実数解ｙが４つ存在するという実数解についての条件に変えることができるからです。実数解の個数問題になれば、今まで解いてきた問題と同様に方程式の係数から条件を考えることができます。

yiを代入して式変形すると、$(y^4-by^2+d)+y(y^4-ay^2+c)i=0$という形になります。
先述のとおりこの式が成り立たなければならないので、（左辺）＝０にするためには実部・虚部ともに０である必要があるため
$y^4-by^2+d=0$
$y^4-ay^2+c=0$
この段階で登場するすべての文字が実数になり、虚数解 x についての問題が実数解 y についての問題になりました。
四次方程式は扱いにくいので、一方のy^4は消去して⇔
$(a-b)y^2=\mathrm{c}-\mathrm{d}$ …①
$y^4-ay^2+c=0$ …②
この実数ｙについての連立方程式①と②が、実数解を４つもてばよいということになります。⇔「①かつ②を満たす実数ｙが４つ存在する（ただしｙ≠０）」

①について注目すると
（Ｉ）y^2の係数$(a-b)$が０でない（a≠b）とき
①はｙの二次方程式として成立するため、①の解の個数は２個以下ということになります。解が４つにはならないので、この場合は不適です。

（Ⅱ）逆に、y^2の係数$(a-b)$が０（a＝b）のとき
①の左辺は０になります。
（Ⅱ－ｉ）右辺（ｃ－ｄ）が０でない場合（ｃ≠ｄ）
①はｙの方程式としては成立しません。そのため解の個数は０です。この時点

で①かつ②を満たす実数ｙが存在できないので、不適になります。

（Ⅱ－ⅱ）右辺（ｃ－ｄ）が０の場合（ｃ＝ｄ）

①はｙの値によらず（左辺）＝（右辺）＝０となり、常に成り立ちます

そのため、この条件のもとで②の実数解が４つであれば、①かつ②の解は４つ存在します。

ここで、②について実数解を４つもつような条件を考えていきます。

四次方程式のままだと、解の個数がわかりにくいので二次方程式の解の個数に帰着させるために$y^2 = t$の変数変換をします。すると「②が実数解を４つもつ」⇔「$t^2 - at + c = 0$がｔ>０の実数解を２つもつ」となり、ｔについての二次方程式で考えられます。

二解とも正になるためには解と係数の関係から二解の和>０、二解の積>０、また、異なる二つの解が存在するために判別式>０であることより、a>0、c>0、$a^2 - 4c > 0$が求められます。

これと、（Ⅱ－ⅱ）の前提条件である a=b,　c=d を合わせて

a=b、c=d、 a>0、c>0、$a^2 - 4c > 0$が求める条件になります。

この問題のポイントは

・虚数解についての問題を、実数解についての問題に変えること

・連立方程式の解の個数は、一方の方程式の解の個数から考えていくこと

・二次以上の方程式の場合、変数変換するなどして次数を落として二次方程式の解の個数問題に帰着させること

です。

本問は設定が難しく一から発想するのは確かに厳しいので、まずは解答の流れを追えるようにして途中で出てくる論理やテクニック的な部分を他の問題に応用できるようにしてください。