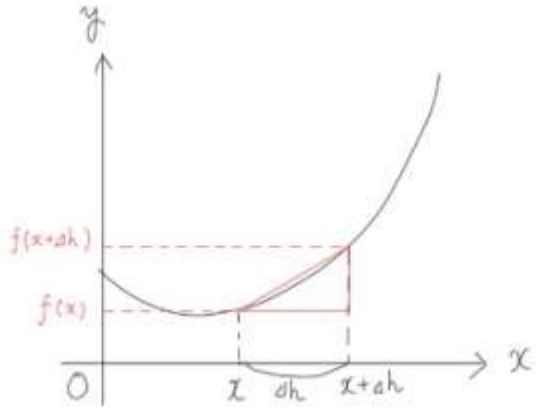
Q．（ 基礎問題精講数学 3 P104 例題 59）
解説の補助をお願いします。

A．まずは微分の定義から振り返ります。



グラフ$y = f(x)$のある 2 点をとり、その 2 点について、

$$(y\text{の変化率}) = \frac{(y\text{の変化量})}{(x\text{の変化量})}$$

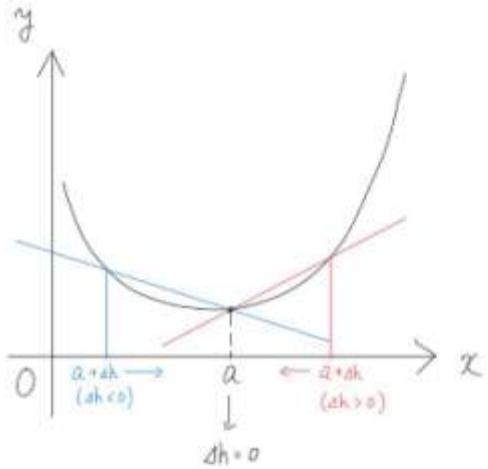
を考えます。このとき
xの変化量をΔh(Δは、「微小な」という意味でよく使われる記号)とおきます。このときyの変化量は$f(x + \Delta h) - f(x)$と書けるので、yの変化率は

$$\frac{(y\text{の変化量})}{(x\text{の変化量})} = \frac{f(x + \Delta h) - f(x)}{\Delta h}$$

となります。
Δhを限りなく 0 に近づけたときのyの変化率、つまり

$$\lim_{\Delta h \to 0} \frac{f(x + \Delta h) - f(x)}{\Delta h}$$

の値を求めることを「微分する」と言います。
この式をよく**微分の定義の式**と呼ぶことがあります。**非常に重要な式なので忘れずに！**



Δhは必ずしも正でなくても構いません。
グラフ上のある点$(a, f(a))$を考えます。
Δhが初め正から 0 に近づくと、**$f(a + \Delta h)$は右から左に近づいていきます。**
逆にΔhが負から 0 に近づくと、**$f(a + \Delta h)$は左から右に近づいていきます。**
Δhが正側から 0 に近づくときを$\Delta h \to +0$
負側から 0 に近づくときを$\Delta h \to -0$と表

します。

$x=a$で微分できるかどうかは、**正側、負側のどちらから近づけても極限値が同じとき**、つまり

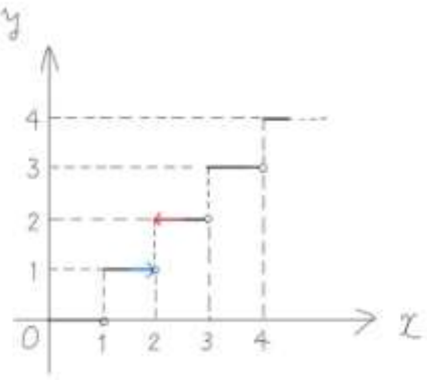
$$\lim_{\Delta h \to +0} \frac{f(a+\Delta h)-f(a)}{\Delta h} = \lim_{\Delta h \to -0} \frac{f(a+\Delta h)-f(a)}{\Delta h}$$

が成り立つとき、

$f(x)$は$x=a$で微分可能であるといいます。

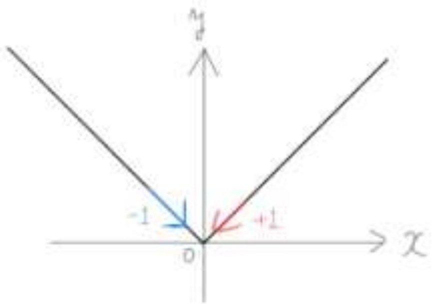
微分可能ではない例を挙げます。

例 1)$y=[x]$（$[x]$はxの整数部分を表し、ガウス関数と呼びます)



$x=1,2,3,4,\ldots$と、xが整数(1,2,3,4,…)の部分ではグラフが途切れていますので、その部分では微分可能ではありません。このように**グラフの不連続な部分では微分可能ではありません**。

例 2)y=|x|(絶対値関数)



$x=0$での微分可能性を考えます。

正側(右側)では、$y=x$で、これをxで微分すると$+1$です。

$$\lim_{\Delta h \to +0} \frac{f(0+\Delta h)-f(0)}{\Delta h} = +1$$

一方、負側(左側)では$y=-x$で、これを微分すると-1です。

$$\lim_{\Delta h \to -0} \frac{f(0+\Delta h)-f(0)}{\Delta h} = -1$$

両者の値が異なるため、この関数は$x=0$で微分可能ではありません。

このように**グラフが連続であっても滑らかでない部分では微分可能ではありま**

せん。

微分可能であるかどうかを直感的に判断するには、**「グラフの滑らかさ」を確かめる**のが良いでしょう。**グラフに途切れている場所や、折れ曲がった場所がなければ直感的に微分可能と判断できます。**
※ただし微分可能性を証明する問題では、右側極限と左側極限が一致することをきちんと確かめましょう。
以上のことを踏まえて本問の解説に移ります。

本問は、$x=1$を境に二つの異なる関数が存在します。$x=1$で微分可能であるためには先ほども説明した通り、次の 2 つを満たす必要があります。

①2 つの関数が$x=1$で途切れていないこと**(連続性の確認)** ↓ ②$x=1$で滑らかであること**(微分可能性の確認)**

①$x=1$で関数が連続であることを確かめるには、$x\to 1+0$(xを正側から 1 に近づける)のときと、$x\to 1-0$(xを負側から 1 に近づける)のときの$f(x)$極限値が一致することを確かめます。

$x>1$から近づけるとき、**関数は$\boldsymbol{f(x)=\frac{\log x}{x}}$**です。

$$\lim_{x\to 1+0} f(x)=\frac{\log 1}{1}=0 \qquad \text{—(ⅰ)}$$

$x<1$から近づけるとき、**関数は$\boldsymbol{f(x)=x^2+ax+b}$**です。

$$\lim_{x\to 1-0} f(x)=1^2+a\cdot 1+b=a+b+1 \qquad \text{—(ⅱ)}$$

(ⅰ)=(ⅱ)であればよいので、

$$a+b+1=0 \qquad \text{—①}$$

②$x=1$で関数が滑らかであることを確かめるには、

$$\frac{f(1+\Delta h)-f(1)}{\Delta h}$$

の$\Delta h \to +0$(正側から近づける)の極限値と$\Delta h \to -0$(負側から近づける)の極限値が一致することを確かめます。

正側から近づけるとき、$x>1$から近づいていくので、**関数は$f(x)=\frac{\log x}{x}$**です。

問題文に書かれている極限値を利用することを意識しながら変形します。

$$\lim_{\Delta h\to+0}\frac{f(1+\Delta h)-f(1)}{\Delta h}=\lim_{\Delta h\to+0}\frac{\frac{\log(1+\Delta h)}{1+\Delta h}-\frac{\log 1}{1}}{\Delta h}=\lim_{\Delta h\to+0}\frac{\log(1+\Delta h)}{(1+\Delta h)\Delta h}$$

$$=\lim_{\Delta h\to+0}\frac{\log(1+\Delta h)}{\Delta h}\times\frac{1}{1+\Delta h}$$

$$=1\times\frac{1}{1+0}=1\times 1=1 \qquad \text{—(iii)}$$

負側から近づけるとき、$x<1$から近づいていくので、**関数は$f(x)=x^2+ax+b$**です。

$$\lim_{\Delta h\to-0}\frac{f(1+\Delta h)-f(1)}{\Delta h}=\lim_{\Delta h\to-0}\frac{\{(1+\Delta h)^2+a(1+\Delta h)+b\}-(1^2+a\times 1+b)}{\Delta h}$$

$$=\lim_{\Delta h\to-0}\frac{2\Delta h+\Delta h^2+a\Delta h}{\Delta h}=\lim_{\Delta h\to-0}(2+\Delta h+a)$$

$$=2+0+a=a+2 \qquad \text{—(iv)}$$

(iii)=(iv)であればよいので

$$1=a+2 \qquad -②$$

以上より①、②を同時に満たすa,bを求めると$a=-1, b=0$

微分可能であるということは**グラフが滑らかということであり、①、②が成り立つということを理解して**おきましょう。