

Q. (標準問題精講 3 p141 研究)

積分区間の揃え方が分かりません。

A.

まず、標問 59 の (2) を利用したいので、I を $B = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1} dx$ の形に近づける必要があります。

まず、 $\int f(x) dx$ の、中身の関数 $f(x)$ の部分を揃えます。

$(x-\alpha)^{p-1}$ を x^{p-1} 型に、 $(x-\beta)^{q-1}$ を $(1-x)^{q-1}$ 型に揃えます。

$t = \frac{x-\alpha}{\beta-\alpha} \dots \textcircled{1}$ とおくと、

$$x - \alpha = (\beta - \alpha)t = \text{定数} \times t$$

$x - \beta = -(\beta - \alpha)(1 - t) = \text{定数} \times (1 - t)$ の形にそれぞれ揃えられます。

I はもともと、 $\alpha \rightarrow \beta$ で dx だったので、 dt に置換するには

$$x : \alpha \rightarrow \beta$$

$$t : 0 \rightarrow 1 \quad (\text{※}\textcircled{1}\text{に}\alpha、\beta\text{をそれぞれ代入})$$

に積分範囲が変わります。

また、 $\textcircled{1}$ を $x =$ の形にすると $x = t(\beta - \alpha) + \alpha$ なので、 $dx = (\beta - \alpha)dt$ になります。

これらを元の I の式に戻して

$$I = \int_0^1 \{(\beta - \alpha)t\}^m \{-(\beta - \alpha)(1 - t)\}^n \cdot (\beta - \alpha) dt \quad \text{となります。}$$

積分区間をそろえるというよりは、置換するために変数 t を設定することでそれに応じて積分区間が変わったという感じです。逆にいうと、B の結果を利用したいので、積分区間が $0 \rightarrow 1$ になるように t を設定してあります。

$t = \frac{x-\alpha}{\beta-\alpha}$ とおく、という発想は必ずしも思いつける必要はありませんが、このように誘

導で設定された場合に、その流れにのって式変形と処理ができるようになっておく必要はあります。