Q．（基礎問題精講 2B　例題 128）

解説の補助をお願いします（三項間漸化式について）。

A．今回の問題は連続する三つの項の間の関係式から一般項を求める**三項間漸化式**です。これまで連続する二項間の関係式の問題を解いてきましたが、三項間ではこの二項型の解き方に持ち込めるように式変形をすることがポイントです。

a_n、a_{n+1}、a_{n+2}の三つをa_nとa_{n+1}、a_{n+1}とa_{n+2}の二つの組み合わせに分けて考えていきます。

（１）のように$b_n=a_{n+1}-\alpha a_n$となるような新たな数列b_nを利用すれば

$a_{n+2}-\alpha a_{n+1}=\beta(a_{n+1}-\alpha a_n)$

$b_{n+1}=\beta b_n$

このように変形できればb_nは二項間等比数列の形になり、一般項を求められます。

では、このようなb_nをみつけるための α 、β の決め方ですが、二項間漸化式でも用いた特性方程式を利用して求めていきます。

$a_{n+2}=pa_{n+1}+qa_n$の型の漸化式の場合、

二次方程式$t^2=pt+q$の２解がこの α 、β に相当します。

解と係数の関係を利用して α ＋ β $=p$、 α β ＝－q です。

本問の場合では、 α ＋ β ＝－１、 α β ＝２となるような、 α と β の組を考えて

（α , β）＝（1,-2）,(-2,1)です。

（２）次に、この α 、β を利用して漸化式を解いていきます。

二つ出てきたうちのどちらの組を使うかですが、一般的に α 、β のうちどちらかが１になっている組を選ぶと後の処理が楽になるので覚えておいてください。

今回は（1,-2）を使います。

$a_{n+2}-a_{n+1}=-2(a_{n+1}-\alpha a_n)$　と変形できるので

$b_n=a_{n+1}-a_n$とすると

$b_{n+1}=-2b_n$

$b_1=a_2-a_1=4-2=2$ だから

$b_n=2(-2)^{n-1}$

$a_{n+1} - a_n = 2(-2)^{n-1}$　←階差数列

a_1、a_2、a_3、a_4、$a_5 \ldots a_{n-4}, a_{n-3}, a_{n-2}, a_{n-1}, a_n$

b_1、b_2、b_3、b_4、$b_5 \ldots . b_{n-4}, b_{n-3}, b_{n-2}, b_{n-1}$

このような関係になっていることからｎ≧2 のとき

階差数列b_nが定義されるのが
階差がとれるｎ≧2 だから

$$a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k$$

$$= 2 + \sum_{k=1}^{n-1} 2(-2)^{k-1}$$

初項：2
項数：n-1
公比：-2
の等比数列の和

$$= 2 + 2 \cdot \frac{1-(-2)^{n-1}}{1-(-2)}$$

$$= 2 + \frac{1-(-2)^{n-1}}{3}$$

$$= \frac{2}{3}\{4 - (-2)^{n-1}\}$$

ｎ＝1 を代入したとき$a_1 = 2$となるから、これはｎ＝1 のときも含む。